# Dunakavics

A Dunaújvárosi Főiskola online folyóirata 2015. III. évfolyam VII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

Kirchner István
Az iteráció konvergenciájának gyorsítása lineáris egyenletrendszerek megoldásakor

Fancsikné Hamar Éva–Tóth Gyula
Függőleges gravitációs gradiens számításával kapcsolatos integrál csonkítási együtthatóinak meghatározása

Vörös Tünde
Az intézményi struktúra és a gazdasági fejlettség kapcsolatának vizsgálata matematikai-statisztikai eszközökkel

Bartalos Norbert–Ujbányi Tibor–Kővári Attila–Nagy Bálint
A Chua-rendszer vizsgálata az Octave alkalmazásával

# Dunakavics

**A Dunaújvárosi Főiskola online folyóirata 2015. III. évfolyam VII. szám**

**Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok**

Megjelelenik évente 12 alkalommal

Szerkesztőbizottság

András István, Király Zoltán, Kukorelli Katalin, Palotás Béla,
Rajcsányi-Molnár Mónika.

Szerkesztőség

Ladányi Gábor (Műszaki)
Nagy Bálint (Informatika és matematika)
Szakács István (Gazdaság és társadalom)
Klucsik Gábor (technikai szerkesztő)

Felelős szerkesztő Németh István
Tördelés Duma Attila

Szerkesztőség és a kiadó címe 2400 Dunaújváros, Táncsics M. u. 1/a.

Kiadja DUF Press, a Dunaújvárosi Főiskola kiadója
Felelős kiadó András István, rektor

A lap megjelenését támogatta TÁMOP-4.2.3-12/1/KONV-2012-0051
„Tudományos eredmények elismerése és disszeminációja
a Dunaújvárosi Főiskolán".
http://dunakavics.duf.hu

ISSN 2064-5007

# *Tartalom*

KIRCHNER ISTVÁN

***Az iteráció konvergenciájának gyorsítása lineáris egyenletrendszerek megoldásakor*** 5

FANCSIKNÉ HAMAR ÉVA–TÓTH GYULA

***Függőleges gravitációs gradiens számításával kapcsolatos integrál csonkítási együtthatóinak meghatározása*** 17

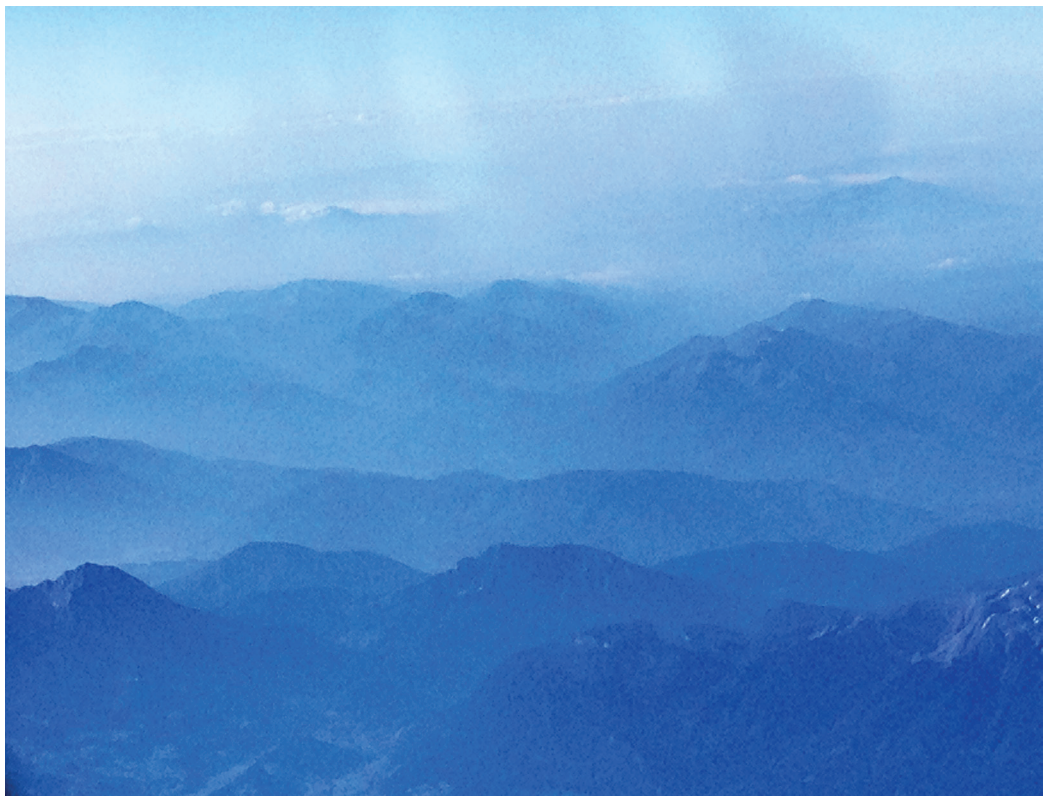
VÖRÖS TÜNDE

***Az intézményi struktúra és a gazdasági fejlettség kapcsolatának vizsgálata matematikai-statisztikai eszközökkel*** 23

BARTALOS NORBERT–UJBÁNYI TIBOR–KŐVÁRI ATTILA–NAGY BÁLINT

***A Chua-rendszer vizsgálata az Octave alkalmazásával*** 41

***Galéria***
(Duma Bálint fotói) 58



Dunakavics - 2015 / 7.

KIRCHNER ISTVÁN *

# *Az iteráció konvergenciájának gyorsítása lineáris egyenletrendszerek megoldásakor*

**Összefoglalás:** Eljárást adunk lineáris egyenletrendszereket megoldó iteratív eljárások legtöbbjének konvergencia-gyorsítására. Ehhez mindössze egy olyan algoritmus szükséges, amely tetszőleges konstansok vektorához az egyenletrendszer egy közelítő megoldását szolgáltatja.
**Kulcsszavak:** Lineáris egyenletrendszer, lineáris egyenletrendszer megoldása, lineáris egyenletrendszer iteratív megoldása, altér iteráció, konvergencia -gyorsítás.

**Abstract:** We developed a method for speeding up convergence of most of the iterative solver of linear equations' systems. It uses an algorithm that provides an approximate solution for the arbitrary vector of constants.
**Keywords:** System of linear equations, solver of linear equations' system, iterative solver of linear equations' system, subspace iteration, speeding up convergence.

A mérnöki gyakorlatban előforduló tervezési feladatok, megoldandó problémák igen nagy hányada vezet lineáris egyenletrendszerre, közismert példa erre a végeselem-módszer. Ezért fontos a nagyméretű lineáris egyen-letrendszerek minél hatékonyabb, egyre gyorsabb megoldása. Az alábbiakban egy olyan eljárást mutatunk be, amely alkalmas iteratív úton működő lineáris egyenletrendszer-megoldások gyorsítására.

Tekintsük az $n$ ismeretlenes

$$\mathbf{Ax=b} \qquad (1)$$

* *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: kirchner@mail.duf.hu

[1] Bronstejn I. N.–Szemengyajev K. A. –Musiol G.–Mühlig H. (2002): *Matematikai kézikönyv.* Budapest: TypoTEX.

[2] Galántai, A. (2003): *Projection Methods for Linear and Nonlinear Equations.* MTA doktori értekezés. Miskolc.

[3] Rózsa P. (1991): *Lineáris algebra és alkalmazásai.* Budapest: Tankönyvkiadó.

[4] Popper Gy.–Csizmás F. (1993): *Numerikus módszerek mérnököknek.* Budapest: TypoTEX.

lineáris egyenletrendszert, melynek $n$ -edrendű $\mathbf{A}$ együtthatómátrixa legyen teljes rangú, azaz a feladatnak egy, egyértelmű megoldása van.

Tegyük föl, hogy ismerjük az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix egy közelítő inverzét. Jelölje ezt $\hat{\mathbf{A}}$. Ennek fölhasználásával az alábbi iteratív eljárást építhetjük föl az $\mathbf{x}$ ismeretlenek vektorának meghatározására. Jelölje $\mathbf{x}_i$ az $\mathbf{x}$ vektor $i$-edik iterációs lépésben adódó közelítését, $\mathbf{v}_i$ pedig a hozzá tartozó hibavektort ($\mathbf{v}_i=\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_i$). Az eljárás kezdő lépése: $\mathbf{x}_0=0$, $\mathbf{v}_0=\mathbf{b}$. Egy közbenső, $i$-edik ( $i \geq 1$ ) iterációs lépésben számítandó mennyiségek:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_{i-1} \quad , \tag{2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad , \tag{3}$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{u} \quad , \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{r} \quad . \tag{5}$$

Az $\mathbf{x}_i$ vektort például akkor tekinthetjük a feladat megfelelően pontos megoldásának, ha a $\mathbf{v}_i$ hibavektor hossza egy előre meghatározott $\varepsilon$ relatív hibánál kisebb. A megoldás tehát akkor elegendően pontos, ha

$$\frac{|\mathbf{v}_i|}{|\mathbf{b}|} < \varepsilon \quad . \tag{6}$$

Ilyen jellegű iterációs eljárás az irodalomból már ismert [1, 2, 3, 4] konvergenciájának sebessége, illetve az, hogy egyáltalán konvergál-e az eljárás, természetesen az $\hat{\mathbf{A}}$ közelítő inverz közelítésétől függ.

A következőkben a fönti iterációs gondolatmenet egy módosított változatát mutatjuk be. Az eljárás kezdő (inicializáló) lépése most is: $\mathbf{x}_0=0$, $\mathbf{v}_0=\mathbf{b}$. Egy közbenső, $k$-adik ( $k \geq 1$ ) iterációs lépés során az alábbi számításokat hajtjuk végre.

A $\mathbf{v}_{k-1}$ hibavektor és a közelítő inverz alapján:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_{k-1} \quad , \tag{7}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} \quad . \tag{8}$$

A (valós) $t_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) lineáris kombinációs együtthatókra nézve végrehajtjuk a következő (föltétel nélküli) optimálást:

$$\min_{(t_1, t_2, \ldots, t_k)} \left| \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j + t_k \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_{k-1} \right|^2 \quad . \tag{9}$$

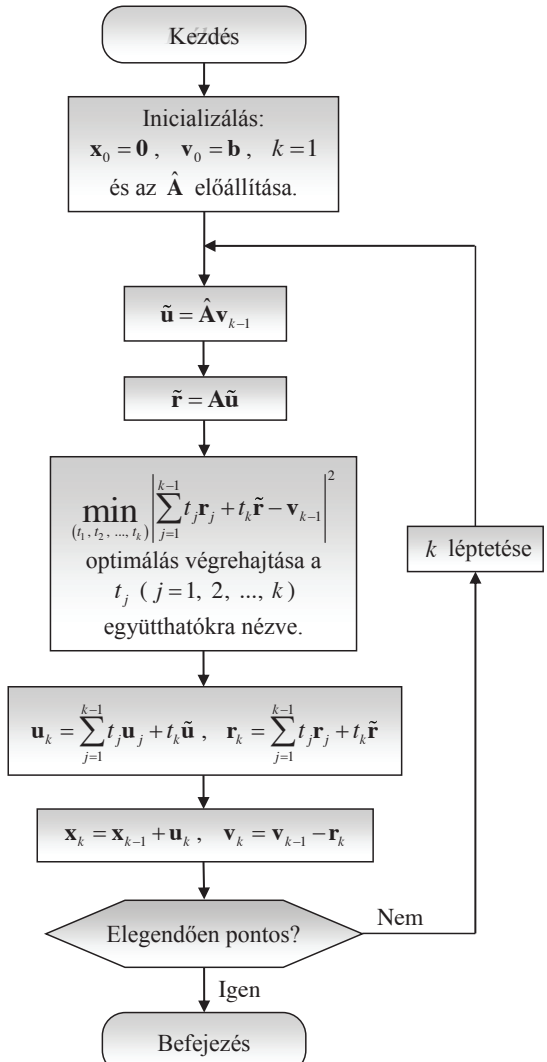
A lineáris kombináció együtthatóit ismerve az $\mathbf{u}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1), $\tilde{\mathbf{u}}$ vektorok lineáris kombinációjaként kapjuk az $\mathbf{u}_k$, míg az ($j$=1, 2, ..., $k$-1),$\tilde{\mathbf{r}}$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{r}_k$ vektort:

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{u}_j + t_k \tilde{\mathbf{u}} \, , \; \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j + t_k \tilde{\mathbf{r}} . \tag{10}$$

Az $\mathbf{u}_k$ és $\mathbf{r}_k$ vektorok közötti összefüggés: $\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \mathbf{r}_k$ . A $k$-adik iterációs lépés $\mathbf{x}_k$ közelítő megoldása és a hozzá tartozó $\mathbf{v}_k$ hibavektor:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k \, , \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{r}_k \, . \tag{11}$$

A leállási kritérium alapján dönthetünk az iteráció folytatásáról vagy leállításáról. Az eljárást az *1. ábrán* egy folyamatábrával szemléltettük.


Kezdés
Inicializálás:
$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , $\mathbf{v}_0 = \mathbf{b}$ , $k = 1$
és az $\hat{\mathbf{A}}$ előállítása.
$\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_{k-1}$
$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}$
$\min_{(t_1, t_2, \ldots, t_k)} \left| \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j + t_k \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_{k-1} \right|^2$
optimálás végrehajtása a
$t_j$ ( $j = 1, 2, \ldots, k$ )
együtthatókra nézve.
$k$ léptetése
$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{u}_j + t_k \tilde{\mathbf{u}}$ , $\mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j + t_k \tilde{\mathbf{r}}$
$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k$ , $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{r}_k$
Elegendően pontos?
Nem
Igen
Befejezés

Az optimálással az $\mathbf{r}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1),$\tilde{\mathbf{r}}$ vektorok által kifeszített altér ($k$-dimenziós sík) azon pontjának a megkeresése a cél, amely a lehető legközelebb van a $\mathbf{v}_{k-1}$ hibavektor végpontjához, ebbe a pontba fog mutatni az altérben az $\mathbf{r}_k$ vektor. Ezért az iterációs lépés végén számított $\mathbf{v}_k$ hibavektor bizonyosan merőleges lesz a teljes (továbbiakban pásztázó) altérre, így valamennyi $\mathbf{r}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) vektorra is. A következő iteráció megkezdésekor, $k$ léptetését követően a számított $\tilde{\mathbf{r}}$ vektor tulajdonképpen e pásztázó altér dimenziószámát növeli meg progresszíven eggyel.

Az $\mathbf{r}_k$ a $\mathbf{v}_{k-1}$ hibavektor pásztázó altérre ($k$-dimenziós síkra) vonatkozó merőleges vetülete:

$$\left(\mathbf{v}_{k-1}-\mathbf{r}_k\right)\cdot\mathbf{r}_j=0 \quad j=1,\ 2,\ ...,\ k-1\ , \tag{12}$$

ahonnan (nem feledve, hogy a korábbiak értelmében $\mathbf{v}_{k-1}\cdot\mathbf{r}_j=0$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1))

$$\mathbf{v}_{k-1}\cdot\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_j=0\,,\ \text{és így}\ \mathbf{r}_k\cdot\mathbf{r}_j=0 \quad j=1,\ 2,\ ...,\ k-1 \tag{13}$$

adódik, ami éppen az $\mathbf{r}_k$ vektor merőlegességét jelenti az összes, őt megelőző $\mathbf{r}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1) vektorra, vagyis minden iterációs lépés végén az $\mathbf{r}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) vektorok a pásztázó altér ortogonális bázisát alkotják.

Egy bekezdés erejéig térjünk vissza az (9) szerinti optimálás végrehajtására. Hamarosan meglátjuk, hogy az optimumhoz tartozó $t_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) együtthatókat zárt alakban is föl fogjuk tudni írni. Ennek érdekében képezzük az

$$F\left(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_k\right)=\left|\sum_{j=1}^{k-1}t_j\mathbf{r}_j+t_k\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{v}_{k-1}\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{k-1}t_j\mathbf{r}_j+t_k\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{v}_{k-1}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}t_jr_{ji}+t_k\tilde{r}_i-v_{k-1,i}\right)^2 \tag{14}$$

függvény $\mathbf{t}_j$ ($l$=1, 2, ..., $k$) szerinti parciális deriváltjait, majd tegyük azokat nullával egyenlővé:

$$\frac{\partial F}{\partial t_l}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}t_jr_{ji}+t_k\tilde{r}_i-v_{k-1,i}\right)r_{li}=0\ ,\quad l=1,\ 2,\ ...,\ k-1 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}t_jr_{ji}+t_k\tilde{r}_i-v_{k-1,i}\right)\tilde{r}_i=0\ . \tag{15b}$$

Utóbbiakban $\mathbf{r}_{ji}$ az $\mathbf{r}_j$, $\tilde{r}_i$ az $\tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v}_{k\text{-}1,i}$ pedig a $\mathbf{v}_{k\text{-}1}$vektor $i$-edik koordinátáját jelenti. (15) összefüggéseket rendezve:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1} t_j r_{ji} r_{li} + t_k \tilde{r}_i r_{li} - v_{k-1,i} r_{li}\right) = 0 \qquad l = 1,\ 2,\ ...,\ k-1\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left(t_j \sum_{i=1}^{n} r_{ji} r_{li}\right) + t_k \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i r_{li} = \sum_{i=1}^{n} v_{k-1,i} r_{li} \qquad l = 1,\ 2,\ ...,\ k-1\ , \qquad (16a)$$

és ugyanígy:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left(t_j \sum_{i=1}^{n} r_{ji} \tilde{r}_i\right) + t_k \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i \tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{n} v_{k-1,i} \tilde{r}_i\ . \qquad (16b)$$

(16) skaláris szorzatokkal fölírva:

$$\sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_l + t_k \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_l = \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_l \qquad l = 1,\ 2,\ ...,\ k-1\ , \qquad (17a)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}} + t_k \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}}\ . \qquad (17b)$$

(17) egy lineáris egyenletrendszer $\boldsymbol{t}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) ismeretlenekkel. Részletesen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 & ... & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 & ... & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 & ... & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & ... & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ ... \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 \\ ... \\ \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix}\ . \qquad (18)$$

Az együtthatómátrix az $\mathbf{r}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1), $\tilde{\mathbf{r}}$ vektorokból képzett Gram-féle mátrix. Itt fölhasználjuk a korábban már bebizonyítottakat, miszerint $\mathbf{v}_{k-1} \perp \mathbf{r}_i$ , vagyis

$$\mathbf{v}_{k-1}^{\cdot\cdot}\mathbf{r}_i = 0\,, \quad \text{ha } i = 1,\ 2,\ ...,\ k-1\,, \tag{19}$$

továbbá $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{r}_j$, és így

$$\mathbf{r}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_j = 0\,, \quad \text{ha } i, j = 1,\ 2,\ ...,\ k-1 \text{ és } i \neq j\,. \tag{20}$$

Ezeket kihasználva az (18) lineáris egyenletrendszer jelentősen egyszerűbb, speciálisabb szerkezetű lesz, úgynevezett nyílhegy alakú szimmetrikus együtthatómátrixszal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 & 0 & 0 & ... & 0 & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_1 \\ 0 & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 & 0 & ... & 0 & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 & ... & 0 & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mathbf{r}_{k-1}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_{k-1} & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_{k-1} \\ \mathbf{r}_1^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & \mathbf{r}_2^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & \mathbf{r}_3^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & ... & \mathbf{r}_{k-1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} & \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ ... \\ t_{k-1} \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

E fölépítés lehetőséget ad a $t_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) ismeretlenek közvetlen fölírására. Az első $k$-1 egyenletből:

$$t_j = -t_k \frac{\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_j} \qquad j = 1,\ 2,\ ...,\ k-1, \tag{22}$$

míg a $k$-adik egyenlet, (22) fölhasználásával:

$$-t_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_j\right)^2}{\mathbf{r}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{r}_j} + t_k \tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}}\,,$$

amelyből

$$t_k = \frac{\mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j\right)^2}{\mathbf{r}_j^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j}} \quad . \tag{23}$$

Tehát az optimumhoz tartozó $\boldsymbol{t}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) lineáris kombinációs együtthatók számítása lineáris egyenletrendszer megoldása nélkül végrehajtható. Először az (23) szerint $\boldsymbol{t}_k$ , majd ezt követően, ennek fölhasználásával a többi $\boldsymbol{t}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$-1) kombinációs együttható határozható meg az (22) alapján.

A pásztázó altér dimenziószáma minden egyes iterációs lépésben eggyel növekedett. Ez a pásztázó altér a képtér altere. A rendelkezésre álló számítógépes memóriakapacitás véges, ezért szükség lehet a dimenziószám korlátozására. Amikor e dimenziószám-korlátot elérjük, elhagyunk egy dimenziót. Ahhoz, hogy melyik dimenziót hagyjuk el, meg kell keresnünk azt az $l$ indexet, amelyhez tartozó $\boldsymbol{t}_l$ és $\boldsymbol{r}_l$ elhagyása a legkevésbé növeli meg az (14) függvény értékét. $l$ -t megtalálva természetesen $\boldsymbol{u}_l$ -t is mellőznünk kell a további számításokból. Meghatározandó tehát az az $1 \le l \le k-1$ index, amely a

$$T(l) = \left| \sum_{j=1}^{k-1} t_j \mathbf{r}_j + t_k \tilde{\mathbf{r}} - t_l \mathbf{r}_l - \mathbf{v}_{k-1} \right|^2 \tag{24a}$$

függvény minimumát adja,

$$t_k = \frac{\mathbf{v}_{k-1}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{r}} + \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_l\right)^2}{\mathbf{r}_l^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_l} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\left(\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j\right)^2}{\mathbf{r}_j^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j}} \quad \text{és} \quad t_j = -t_k \frac{\tilde{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_j^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_j} \qquad j = 1,\ 2,\ ...,\ k-1 \tag{24b}$$

egyenlőségek teljesülése mellett. Ennek legegyszerűbb módja az (tekintettel a számítógépes megvalósításra), ha végigpróbáljuk az összes indexet, és kiválasztjuk a célunknak legmegfelelőbbet.

*Megállapíthatók a következők:*

− Dimenziószám korlátozás nélküli progresszív altérrel történő pásztázás esetén az algebrai értelemben vett pontos megoldást elméletileg legfőljebb *n* iterációs lépesben megkapjuk, függetlenül a közelítő inverz mátrix fölépítésétől. (A számítógép véges számábrázolása a gyakorlatban azonban ennél több iterációs lépést is elképzelhetővé tesz.)
− Az eljárás stagnál, ha a $\mathbf{v}_{k-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{r}}$ skaláris szorzat zérus, azaz, ha az $\tilde{\mathbf{r}}$ éppen merőleges a $\mathbf{v}_{k-1}$ vektorra.
Minden egyéb esetben az aktuális iterációs lépésben bizonyosan közelebb kerülünk a megoldáshoz.

Az eljárás szempontjából érdektelen az $\hat{\mathbf{A}}$ közelítő inverz fölépítése, pontosabban a $\mathbf{v}_{k-1}$ aktuális hibavektorhoz tartozó $\tilde{\mathbf{u}}$ közelítő megoldás fölvétele. Ennek köszönhető, hogy a gyorsító eljárás a legkülönbözőbb iterációs alapon működő lineáris egyenletrendszer- megoldó algoritmushoz, pl. Traub, J. F. (1964) [5] kiegészítő eljárásként használható. Ezen algoritmusnak mindössze egyetlen kritériumnak kell megfelelnie: az aktuális $\tilde{\mathbf{u}}$ közelítő megoldás alapján számított $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}$ vektor nem szabad, hogy merőleges legyen a $\mathbf{v}_{k-1}$ hibavektorra.

A bemutatott gyorsító eljárásban lényegében egy olyan **x** vektor meghatározása volt a cél, amely az $\mathbf{Ax}-\mathbf{b}$ hibavektor hossznégyzetét a legkisebbé teszi.

Vizsgáljuk meg közelebbről e

$$Q(\mathbf{x}) = |\mathbf{Ax}-\mathbf{b}|^2 \tag{25}$$

skalár-vektor függvény fölépítését:

$$Q(\mathbf{x}) = |\mathbf{Ax}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^2 = (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot-\mathbf{b}\cdot)(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) =$$

$$= \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Ax}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{Ax}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Ax}-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2 \tag{26}$$

Ennek gradiense:

$$grad\ Q(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{Ax}-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = 2\mathbf{A}\cdot(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\ . \tag{27}$$

[5] Traub, J. F. (1964): *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Azon **x** vektorra, amely $Q(\mathbf{x})$ minimumát adja, e gradiens nullává válik, így ekkor teljesül az

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right)=\mathbf{0} \qquad (28)$$

egyenlőség.

Reguláris **A** mátrix esetén (28) azt jelenti, hogy a $Q(\mathbf{x})$-et minimalizáló **x** éppen az **Ax=b** lineáris egyenletrendszer megoldása. Szinguláris **A** mátrix esetén viszont csak annyit mondhatunk, hogy a $Q(\mathbf{x})$-et minimalizálva egy olyan **x** vektort kapunk, amelyre $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Ax-b})=\mathbf{0}$. Vizsgáljuk meg ennek geometriai jelentését. Az **Ax-b** hibavektor $Q(\mathbf{x})$ minimumánál merőleges az **A** mátrix valamennyi oszlopvektorára (és így az oszlopvektorok által kifeszített altér egészére), hiszen az oszlopvektorokkal képzett skaláris szorzatai valamennyien nullák. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy szinguláris **A** együtthatómátrix esetén $Q(\mathbf{x})$ minimalizálása egy olyan **x** vektort szolgáltat, amelyhez tartozó **Ax** képvektor az **A** oszlopvektorai által kifeszített altér azon vektorát adja, amely a legközelebb van az egyenletrendszer **b** konstansok vektorához.

A kidolgozott eljárást, annak tesztelése érdekében három különböző iteratív eljárással építettük össze. Az első esetben a közelítő inverz mátrixot $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{DA}^{\cdot}$ alakban vettük föl, ahol a **D** diagonálmátrix rendre az **A** oszlopvektorai hossznégyzeteinek reciprokait tartalmazza. (Ez a közelítő inverz akkor egyezik meg a ténylegessel, ha az **A** oszlopai mint vektorok páronként merőlegesek egymásra.)

Az eljárást a konvergencia érdekében még ki kellett egészíteni egy 1-dimenziós pásztázó altérrel. Ez volt az első iteratív algoritmus, amit többdimenziós pásztázó altérrel egészítettünk ki. A második iteratív algoritmus a gradiens-módszer, míg a harmadik a konjugált irányok módszere volt. Az *1. táblázat*ban foglaltuk össze a kapott eredményeket.

A táblázat három építőmérnöki szerkezet végeselemes vizsgálatakor adódó lineáris egyenletrendszer megoldásához szükséges iterációk számát tartalmazza. Szürkével látható az eredeti iterációs eljárások használata esetén szükséges iterációk száma, míg feketével a pásztázó altér alkalmazásával fölgyorsított eljárások által igényelt iterációk száma a kellően pontos megoldás eléréséhez.

A közelítő megoldást $10^{-5}$-nél kisebb relatív hiba esetén tekintettük elegendően pontosnak. Az együtthatómátrix mindhárom esetben pozitív definit, az ismeretlenek száma pedig rendre *75* (első sor), *921* (második sor) és *2643* (harmadik sor). A pásztázó altér maximális dimenziószámát 300-ban határoztuk meg, melyet jól láthatóan csak egy esetben értünk el, hiszen mindössze egy helyen találunk a táblázatban 300-nál nagyobb fekete számot.

***1. táblázat***

| *n* ismeretlenek száma | Szükséges iterációk száma | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 1-dimenziós pásztázó altérrel | $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ max. 300-dimenziós pásztázó altérrel | Gradiens-módszerrel | Gradiens-módszer max. 300-dimenziós pásztázó altérrel | Konjugált irányok módszerével | Konjugált irányok módszere max. 300-dimenziós pásztázó altérrel |
| *75* | 12674 → | 20 | 20956 → | 24 | 27 → | 24 |
| *921* | 14697 → | 232 | 89562 → | 66 | 98 → | 66 |
| *2643* | 45481 → | 545 | 9987 → | 146 | 273 → | 146 |

A (2)-(5) összefüggésekkel definiált iterációhoz képest a pásztázó altér alkalmazása a $k$-adik iterációban $(3k+2)n$ (valós szám) szorzást és $3kn$ összeadást mint többlet műveletet igényel, továbbá a $\boldsymbol{t}_j$ ($j$=1, 2, ..., $k$) lineáris kombinációs együtthatók elenyésző műveletigényű számítását, amelyek elhanyagolhatók az egy iterációs lépésben egyébként általában elvégzendő műveletek mennyiségéhez képest.

A tényleges, iterációnkénti futásidő növekedés függ a módszertől, ami kiegészítésre kerül e gyorsító eljárással, függ az ismeretlenek számától, függ attól, hogy melyik iterációban járunk, függ attól, hogy figyelembe vesszük-e az együtthatómátrix (általában) ritka jellegét, függ az együtthatómátrix kondicionáltságától, stb. A futtatási tapasztalatok alapján azonban mégis kimondható, hogy hozzávetőleg 50−100 ismeretlen esetén az egy iteráción belüli futásidő-növekedés 5−10%, ami néhány ezer ismeretlen esetén lecsökken 1−3%-ra, míg ennél több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszerre nézve elhanyagolható.

A legdominánsabb hatása tehát az ismeretlenek számának van, továbbá megállapítható, hogy annak növekedésével a kidolgozott módszer egyre hatékonyabb. Ez pedig azt jelenti, hogy néhány ezer ismeretlen fölött a szükséges iterációk számának csökkenési aránya jó közelítéssel a megoldáshoz szükséges tényleges időcsökkenés arányát is reprezentálja. Tehát túlzások nélkül kijelenthetjük, hogy *e cikkben ismertetett eljárás a legtöbb esetben megdöbbentően hatékony.*

FANCSIKNÉ HAMAR ÉVA *–TÓTH GYULA **

# *Függőleges gravitációs gradiens számításával kapcsolatos integrál csonkítási együtthatóinak meghatározása*

**Összefoglalás:** Megvizsgáltuk annak az integrálnak a csonkítási tulajdonságait, amellyel az Eötvös-inga segítségével mért szintfelületi görbületi mennyiségeket felhasználva meghatározható a függőleges gradiens értéke. A kiindulásként használt magfüggvény zárt alakját levezettük és összevetettük a szakirodalomban Sprlak et al. által kiszámított sorösszeggel. [1] Bizonyítottuk a két alak azonosságát. Ismertetjük a csonkítási együtthatók számításának rekurzív összefüggéseit.
**Kulcsszavak:** Eötvös-inga, csonkítási együtthatók, Legendre-függvények, görbületi mennyiségek.

**Abstract:** We examined truncation properties of the integral which gives vertical gravity gradients from measured curvature gradients of a level surface yielded by the Eötvös torsion balance. A closed expression of the kernel function was derived and compared with the expression obtained by Sprlak et al. by summing infinite series. The equivalence of the two expressions was proved. Recursive formulas for the computation of truncation coefficient are presented.
**Keywords:** Eötvös torsion balance, truncation coefficients, Legendre functions, curvature gradients.

Az Eötvös-inga segítségével mérhetőek helyi térbeli derékszögű É (Észak), K (Kelet), L (Le) koordináta rendszerben a nehézségi erő $V(\bar{r})$ potenciáljának $(\partial_{\text{ÉÉ}}\text{-}\partial_{\text{kk}})\, V(\bar{r})$ illetve $2\partial_{\text{ÉK}} V(\bar{r})$ görbületi mennyiségei (második deriváltak). [2] A nehézségi erő $V_{\text{LL}}(\bar{r}) = \partial_{\text{LL}} V(\bar{r})$ függőleges gradiensét az alábbi integrállal számíthatjuk ki. [3]

* *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: fhamare@mail.duf.hu

** *Budapesti Műszaki Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
E-mail: gtoth@agt.bme.hu

[1] Sprlak, M.– Sebera, J.– Valko, M. (2014): Spherical integral formulas for upward/ downward continuation of gravitational gradients onto gravitational gradients. *Journal of Geodesy* .Volume. 88. Issue: 2. Pp. 179–197. DOI: 10.1007/ s00190-013-0676-6

[2] Völgyesi L. (2012): Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában. *Geomatikai Közlemények* XV. Pp. 9–26.

[3] Tóth Gy. (2002): Az Eötvös geodéziai peremértékfeladat. *Geomatikai Közlemények.* V. Pp. 163–174.

$$V_{LL}(\bar{r})\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}[(\partial_{ÉÉ}-\partial_{KK}\ )V(\bar{r}^*)\cos\ 2\alpha^*+2\partial_{ÉK}V(\bar{r}^*)\sin 2\alpha]^*\,K_{(2)}(\hat{r}\hat{r}^*)d\Omega^*$$

Az itt szereplő $K_{(2)}(\hat{r}\,\hat{r}^*)$ magfüggvény spektrális alakja:

$$K_{(2)}(\hat{r}\,\hat{r}^*)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\hat{r}^*}{r}\right)^{n+3}\frac{2n+1}{(n-1)^n}P_{n,2}(\hat{r}\hat{r}^*)$$

*Jelölések:*

$\overline{r,\ }\hat{r}$ : a számítási pont helyvektora, $\hat{r}=\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$ egységvektor

$\bar{r}^*,\hat{r}^*$: az adatpont helyvektora, $\hat{r}^*=\frac{\bar{r}^*}{|\bar{r}^*|}$ egységvektor

$\partial$ : mért szintfelületi görbületi mennyiségek

É, K, L : a helyi térbeli derékszögű koordináta rendszer tengelyirányai (Észak, Kelet, Le)

Ω : térszög tartomány (a teljes)

dΩ* : térszög elem

α* : ellen-azimut (az adatpontból a számítási pontba menő legnagyobb gömbi kör É-i iránnyal bezárt szöge)

$P_{n,2}(\hat{r}\,\hat{r}^*)$ : n-ed fokú, másodrendű Legendre-függvény

$\bar{r}^*\ast\hat{r}^*=\cos\psi$ : skaláris szorzat (ψ: a két vektor által bezárt szög, gömbi szögtávolság)

A gyakorlatban az integrálást nem a teljes térszög tartományra (egység gömb felszíne), hanem a számítási pont $\bar{r}$ körüli adott sugarú területre (gömbsüveg) végezzük el (csonkítás). [4]

[4] Tóth Gyula–Fáncsikné Hamar Éva (2013): A kibővített Stokes-féle függvény csonkítási együtthatóinak hatékony számítása. *Geomatikai Közlemények.* XVI. Pp. 51–62.

Feladatunk a csonkítás hatásának számszerű vizsgálata.

Ezt két lépésben végezzük el:
– A magfüggvény zárt alakjának levezetése;
– A magfüggvény csonkítási integráljának meghatározása.

## A magfüggvény zárt alakjának levezetése

Alkalmazzuk a következő segédösszefüggést:

$$P_{n,2}(x) = \frac{n}{1-x^2}\{2xP_{n-1}(x) - [(n+1)(1-x^2) + 2x^2]P_n(x)\}$$

behelyettesítve, tagonként szummázva és résztörtekre bontva:

$$K(\sigma,x) = \frac{2x}{1-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n}\sigma^{n+4}P_n(x) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{n-1}\sigma^{n+3}P_n(x) - \frac{2x^2}{1-x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n-1}\sigma^{n+3}P_n(x)$$

Az itt szereplő végtelen sorok összegfüggvényei ismertek (Moritz, 1980).

Ezeket figyelembe véve a végeredmény:

$$K(\sigma,x) = \left[\frac{4x(\sigma-x)}{1-x^2} - 5\right]\sigma^3\left(\frac{1}{L} - 1 - \sigma x\right) - 2\sigma^4\left(\frac{x-\sigma}{L^3} - x\right) - \frac{6\sigma^3}{1-x^2}(1-\sigma x - L) + \frac{4x^2\sigma^5}{1-x^2}$$

ahol $L = \sqrt{1-2\sigma x+\sigma^2}$.

# A magfüggvény csonkítási integráljának meghatározása

A csonkítás vizsgálatához a magfüggvény másodrendű $P_{n,2}\,(x)$ Legendre-függvényekkel vett szorzatának integráljait szükséges kiszámítani:

$$G_n(\sigma, t_0) = \int_{-1}^{t_0} K_{(2)}\,(\sigma, x) P_{n,2}(x)\,dx$$

ahol $n$=2,3,…, $t_0=cos\psi_0$ és $\psi_0$ az a gömbi szögtávolság, amelyen belül adatokkal rendelkezünk.

*Elvi megoldás menete:*
Figyelembe vesszük a másodrendű Legendre-függvények definiáló összefüggéseit:

$$P_{n,2}(x) = (1 - x^2)\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} \qquad n=2,3,\ldots$$

– ezzel eltüntetjük a nevezőben található $(1\text{-}x^2)$ szorzókat.
– parciális integrálásokkal eltüntetjük a derivált $P_n''\,(x)$ Legendre-polinomokat,
– felhasználjuk az alábbi , már kiszámított integrálokat: (*)

$$I_n(t_0) = \int_{-1}^{t_0} P_n\,(x)\,dx \qquad J_n(t_0) = \int_{-1}^{t_0} xP_n\,(x)\,dx$$

$$A_n(\sigma, t_0) = \int_{-1}^{t_0} \frac{P_n(x)}{L}\,dx \qquad N_n(\sigma, t_0) = \int_{-1}^{t_0} \frac{P_n(x)}{L^3}\,dx$$

$$O_n(\sigma, t_0) = \int_{-1}^{t_0} \frac{xP_n(x)}{L^3}\,dx \qquad n = 0,1,\ldots$$

segédösszefüggések:

$$xP_n^{'}(x) = nP_n(\mathrm{x}) + P_{n-1}^{'}(x)$$

$$P_{n+1}^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n^{'}(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) P_n^{'}(1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_n^{"}(1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}$$

$$(1-x^2)P_{n,2}^{'}(x) = (n+2)P_{n-1,2}(x) - nxP_{n,2}(x)$$

$$(1-x^2)P_{n,2}^{'}(x) = (n+1)P_{n,2}(x) - (n-1)P_{n,2}(x)$$

– végül az összes részintegrál tetszőleges n-re kiszámítható lesz (rekurzióval)

Legyen K ={-3; -1; 0; 1; 2; 4; 6}, ekkor:

$$G_n(\sigma, t_0) = \sum_{k\in K} C_k(\sigma)[L^k(\sigma, t_0)P_n^{'}(t_0) - (1+\sigma)^k P_n^{'}(-1)] + \sum_{k\in K} k\sigma C_k(\sigma) \int_{-1}^{t_0} L^{k-2} P_n^{'}(x)dx$$

ahol a $C_k(\sigma)$ -k $\sigma$ ismert függvényei, illetve az alábbi integrálok meghatározhatók:

$$V_n(\sigma; t_0) = \int_{-1}^{t_0} L^{-5} P_n^{'}(x)dx \qquad U_n(\sigma; t_0) = \int_{-1}^{t_0} L^{-3} P_n^{'}(x)dx$$

$$T_n(\sigma; t_0) = \int_{-1}^{t_0} L^{-1} P_n^{'}(x)dx \qquad Y_n(\sigma; t_0) = \int_{-1}^{t_0} L^{2} P_n^{'}(x)dx\, Z_n(\sigma; t_0)$$

$$= \int_{-1}^{t_0} L^4 P_n'(x)dx \qquad (**)$$

Látható, hogy a magfüggvény csonkítási integráljai kiszámíthatók. A gyakorlatban a számítás rekurzív összefüggések alkalmazását jelenti a (*), (**) együtthatók előállításán keresztül.

További terveink között szerepel a rekurzív számítás numerikus ellenőrzése és annak a stabilitás-vizsgálata magas n fokszámokra (n = 2190).

VÖRÖS TÜNDE *

# *Az intézményi struktúra és a gazdasági fejlettség kapcsolatának vizsgálata matematikai-statisztikai eszközökkel*

**Összefoglalás:** A gazdasági, politikai, jogi és társadalmi intézmények gazdasági teljesítményre gyakorolt hatásával foglalkozó kutatások számának robbanásszerű növekedését Friedrich Hayek (1974) [1] és Douglas North (1993) [2] Nobel-díjas munkái indukálták a huszadik század végén. Az új intézményi közgazdaságtan irányzata szerint a gazdasági teljesítmény magyarázatához nem elegendő a tőke akkumulációjának és a demográfiai változásoknak a figyelembevétele. Jelen tanulmány célja ennek megfelelően az intézményi hatásmechanizmust értékelő modellek vizsgálata mellett az intézmények és a gazdasági teljesítmény kapcsolatának elemzése matematikai-statisztikai eszközökkel.
**Kulcsszavak:** Intézményi közgazdaságtan, gazdasági fejlődés, matematikai statisztika.

**Abstract:** Friedrich Hayek's (1974) and Douglass North's (1993) Nobel Prize winner works have induced the increase of researches on political, legal, social and economic institutions' role in economic performance. The perspective of new institutional economics claims that considering only the accumulation of capital and demographical change is not sufficient to the explanation of economic growth. This paper aims to examine the theoretical models of institutional mechanisms and analyse the relationship between institutions and economic development by statistical methods.
**Keywords:** Institutional economics, economic development, mathematical statistics.

* *Széchenyi István Egyetem, Regionális- és Gazdaságtudományi Doktori Iskola*

E-mail: voros.tunde@sze.hu

[1] Hayek, F. (1974): *The Pretence of Knowledge.* (Nobel Prize Lecture) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1974/hayek-lecture.html (Letöltve: 2014. 03. 25.)

[2] North, D. (1993): *Economic Performance through Time.* (Nobel Prize Lecture) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1993/north-lecture.html (Letöltve: 2014. 03. 25.)

[3] Romer, P. M. (1986): Increasing Returns and Long Run Growth. *Journal of Political Economy.* Vol. 94. Pp. 1002–1037.

[4] Romer, P. M. (1990): Endogenous Technical Change. *Journal of Political Economy.* Vol. 98. Pp. 71–102.

[5] Lucas, R. E. (1988): On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics.* Vol. 22. Pp. 3–42.

[6] Mankiw, G. N.–Romer, D.–Weil, D. N. (1992): A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics.* Vol. CVII. Pp. 407–437.

[7] Solow, R. M. (1956): A contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics.* Vol. 70. No. 1

[8] Meyer, D. (1995): Az új növekedéselmélet. *Közgazdasági Szemle.* 1995/4. Pp. 387–398.

## Bevezetés

Az egészen napjainkig uralkodó elméleti irányzatnak számító neoklasszikus közgazdaságtan dominanciáját az 1929–1933-as világgazdasági válság, majd a második világháború következtében kialakuló gazdasági problémák kezelése révén szerezte. Az alkalmazott korlátozó feltételek és a valóságtól eltérő ideális körülmények feltételezése, valamint a 20. század második felében jelentkező, addig ismeretlen gazdasági jelenségek azonban a neoklasszikus közgazdaságtannal szemben megfogalmazott kritikák előtérbe kerülését eredményezték. (Megjegyzés: A világgazdasági rendszer teljes átalakulása, az olajárak emelkedése, az aranydeviza-rendszer felbomlása, a keleti blokk megszűnése és az ismétlődő pénzügyi válságok új magyarázatot igényeltek.) Számos új, alternatív irányzat jelent meg, amelyek többek között megkérdőjelezték a tökéletes racionalitást, a teljes és szimmetrikus információk létét, az optimalizáló magatartást, a zérus tranzakciós költségeket, a tökéletesen versenyző piacokat vagy a termelési tényezők homogenitását.

A gazdasági növekedést érintő kérdésekre a neoklasszikus növekedési modellek újragondolásával, az úgynevezett új növekedéselméletek létrejöttével születtek válaszok [3, 4, 5, 6] amelyek a neoklasszikus Solow-modell [7] kritikájaként, vagy annak továbbfejlesztéseként bontakoztak ki. (Megjegyzés: Az új növekedéselméletként jellemzett irányzat a gazdasági növekedés szempontjából jelentős technikai haladást endogén tényezőként értelmezi. [8]) Ezeket az elméleteket bírálva került előtérbe számos interdiszciplináris irányzat, mint például az intézményi közgazdaságtan, az evolucionista közgazdaságtan, a politikai gazdaságtan, a viselkedésgazdaságtan, a környezet -gazdaságtan, vagy a jog és a közgazdaságtan kölcsönhatását kiemelő irányzatok. Közös jellemzőjük, hogy az új növekedéselméleteket az intézményi környezet figyelmen kívül hagyása miatt illetik kritikával, valamint felismerik a gazdasági-, politikai és társadalmi intézmények gazdasági teljesítményt befolyásoló szerepét. Jelen tanulmányban az intézményi közgazdaságtan szemléletmódjához illeszkedve, azon belül is az új intézményi közgazdaságtan elméleti keretében vizsgálom az intézmények és a gazdasági fejlettség kapcsolatát. Az irányzat az 1970-es évek végén különül el a régi intézményi közgazdaságtantól, bírálva a holisztikus megközelítést és a formalizmus hiányát.

Az intézményeket elsősorban az emberi tevékenységet befolyásoló döntési korlátként értelmezi, elfogadva az önérdekkövetés elvét. Módszertani individualizmus, formalizált megközelítés jellemzi: matematikai-statisztikai, ökonometriai és játékelméleti eszközöket is alkalmaz.

A dolgozat első részében az intézményi hatásmechanizmust leíró elméleteket, majd az intézményi környezet számszerűsítési lehetőségeit vizsgálom. Ezt követően egy empirikus elemzés keretében matematikai-statisztikai eszközökkel elemzem az intézményi környezet és a gazdasági teljesítmény kapcsolatát különböző nemzetgazdaságok vonatkozásában. Jelen dolgozat a klaszteranalízist, mint gyakorlati problémamegoldó eszközt alkalmazza. A klasszifikáció által létrehozott országcsoportok jellemzőit statisztikai hipotézisvizsgálatokkal elemzem tovább. A kvantitatív eredmények publikálásával párhuzamosan azok interpretációjára, lehetséges elméleti magyarázataira is hangsúlyt fektetek.

## Intézményi hatásmechanizmus és gazdasági növekedés

A gazdasági, politikai, jogi és társadalmi intézmények gazdasági teljesítményre gyakorolt hatásával foglalkozó kutatások számának robbanásszerű növekedését Friedrich Hayek (1974) [1] és Douglass C. North (1993) [2] Nobel-díjas munkái indukálták a huszadik század végén. Az új intézményi közgazdaságtan képviselői különös figyelmet szenteltek a téma iránt, számos tanulmány született a különböző intézmények gazdasági növekedésben betöltött szerepéről az elmúlt évtizedekben. [9, 10, 11, 12] A kapcsolat tényének és mértékének vizsgálata mellett erőteljes vita övezi a hatásmechanizmust érintő kérdéseket is. Miként fejtik ki az egyes intézmények hatásukat a gazdasági teljesítményre? Hogyan írható le ez a hatásmechanizmus, és mely intézmények bírnak kulcsfontosságú szereppel?

[1] Hayek, F. (1974): *The Pretence of Knowledge.* (Nobel Prize Lecture) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1974/hayek-lecture.html (Letöltve: 2014. 03. 25.)

[2] North, D. (1993): *Econo-mic Performance through Time.* (Nobel Prize Lecture) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1993/north-lecture.html (Letöltve: 2014. 03. 25.)

[9] Barro, R. J. (1991): Economic Growth in a Cross-Section of Countries. *Quarterly Journal of Economics*. 106. Pp. 407–443.

[10] Acemoglu, D. (1995): Reward Structures and the Allocation of Talent. *European Economic Review*. 39. Pp.17–33.

[11] Glaeser, E. L.−Rafael La Porta−Silanes, F. L.−Shleifer, A. (2004): Do Institutions Cause Growth? *Journal of Economic Growth.* 9. Pp. 271–303.

[12] Temple, J. (1999): The New Growth Evidence. *Journal of Economic Literature.* 37. Pp. 112–156.

[13] North, D. C. (1981): *Structure and Change in Economic History*. New York: W. W. Norton&Company.

[14] North, D. C (1990): *Institutions, institutional change and economic performance.* Cambridge: Cambridge University Press. (Magyarul: Intézmények, intézményi változás és gazdasági teljesítmény. Budapest: Helikon.)

[15] North, D. C. (1991): Institutions. *Journal of Economic Perspectives.* 5(1). Pp. 97–112.

[16] North, D. C. (2005): *Understanding the Process of Economic Change.* Princeton: Princeton University Press.

[17] Williamson, O. E. (2000): *T*he New Institutional Economics: Taking Stock, Looking Ahead. *Journal of Economic Literature.* 38. 3. Pp. 595–613.

[18] Acemoglu, D.–Johnson, S.–Robinson, J. (2004): *Institutions as the Fundamental Cause of Long-Run Growth.* NBER Working Paper 10481. Cambridge: NBER.

[19] Bjørnskov, C.–Foss, N. J. (2010): *Do Economic Freedom and Entrepreneurship Impact Total Factor Productivity?* Copenhagen: Copenhagen Business School, Center for Strategic Management and Globalization, SMG Working Paper 8/2010.

A következőkben időrendi sorrendben mutatom be az intézmények gazdasági teljesítményt alakító hatását magyarázó elméleteket. Elsőként North (1981, 1990, 1991, 2005) [13, 14, 15, 16], majd Williamson (2000) [17], Acemoglu (2004) [18], végül Bjørnskov és Foss (2012) [19] elméletét mutatom be.

Az új intézményi közgazdaságtan atyjának tekintett North az elsők között érvelt a neoklasszikus növekedési elmélet hiányossága mellett. Véleménye szerint a hagyományos növekedési elmélet azért szorul finomításra, mert a gazdasági teljesítmény magyarázatához nem elegendő a tőke akkumulációjának és a demográfiai változások vizsgálata, hanem az intézményekre is szükség van. [13] A Nobel-díjas közgazdász elmélete szerint az intézmények a tranzakciós költségek (mérési és érvényesítési költségek) módosításán keresztül befolyásolják az egyes döntési alternatívák relatív árait.

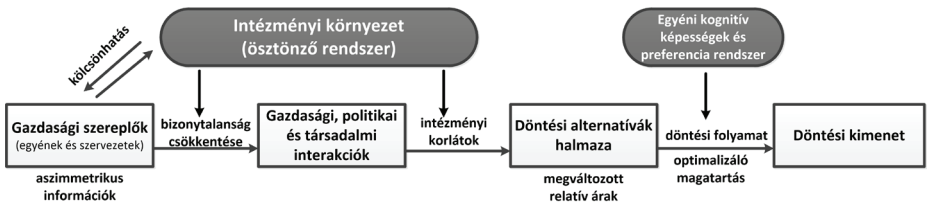
A tranzakciós költségekre gyakorolt hatás által a társadalmi és gazdasági interakciókat jellemző információs aszimmetriából eredő bizonytalanság csökkentése révén érvényesül az intézmények szerepe. A gazdasági szereplők döntési helyzeteinek összetettsége, a döntéshozó tökéletlen informáltsága és kognitív képességei egyaránt hozzájárulhatnak a bizonytalanság növeléséhez.

A kialakult intézményi keret a döntési alternatívákat szerkezetbe foglalva korlátozza tehát a választási lehetőségeket csökkentve az egyes alternatívákhoz kapcsolódó bizonytalanság szintjét. Különböző intézményi szerkezet eltérő tranzakciós költségeket eredményez, más és más választási lehetőséget téve ezáltal kívánatosabbá a gazdasági rendszer szereplői számára. [14]

Így az intézményi keret egy ösztönzőrendszert is meghatároz, kijelölve a gazdasági és társadalmi fejlődés irányát is azáltal, hogy meghatározza, mely ismeretek és készségek bizonyulnak fontosnak.

Az alábbi ábra az intézményi környezet, mint ösztönző rendszer hatásmechanizmusát mutatja be North (1990) [14] elméletéből kiindulva.

***1. ábra. Az intézményi környezet, mint ösztönzőrendszer.***




Forrás: saját szerkesztés

A szintén Nobel-díjas Oliver Eaton Williamson (2000) [17] az intézmények hatásmechanizmusát négy különálló, egymással hierarchikus viszonyban lévő intézményi szint egymásra épülésével magyarázza. Az *első* szint a társadalom magatartásába már beágyazódott, informális intézmények (szokások, hagyományok, normák) szintje, változásuk igen lassú, alapvető korlátokat nyújtanak az emberi viselkedés számára. A *második* szint a formális szabályok alkotta intézményi környezet (jogi, politikai és közigazgatási szabályrendszerek), amelyek időbeli változása már valamivel gyorsabb. A *harmadik* szint az irányítás szintje, ahol a szerződéses cserefolyamatok, az üzleti szféra irányítása zajlik. A legalsó *negyedik*, egyben leggyorsabban változó szint az erőforrás-allokáció és felhasználás szintje, ahol időben folyamatosan történik a paraméterek (árak és mennyiségek) igazodása. Williamson elmélete szerint a felsőbb szintek exogén tényezőként jelennek meg, külső korlátként funkcionálnak az alsóbb szintek számára. A szintek között kölcsönhatás is megfigyelhető, azonban az alsó szintek korlátozó hatása felfelé már kevésbé mértékadó.

Acemoglu és szerzőtársai (2004) [18] North megközelítésének (1990) [14] alapjaira építkezve a gazdasági és politikai intézmények meghatározó szerepét hangsúlyozzák a gazdasági teljesítmény szempontjából. A modell bemenetét a politikai intézmények és a kezdeti erőforrás-allokáció adják. Ezek határozzák meg a bizonyos érdekcsoportok kezében összpontosuló *de jure* és *de facto* politikai hatalmat. A politikai hatalom a gazdasági és politikai intézmények létrehozásán keresztül determinálja a gazdasági teljesítményt és az erőforrás-elosztást. Ezáltal a nagyobb politikai hatalommal rendelkezők érdekeinek érvényre jutását is feltételezi a modell. Habár a gazdasági teljesítmény számára a politikai és gazdasági intézményi struktúra jelent közvetlen korlátozó és ösztönző rendszert. A folyamat dinamizmusát az erőforrás-allokáció és a politikai hatalom időbeli változása adja.

[14] North, D. C (1990): *Institutions, institutional change and economic performance.* Cambridge: Cambridge University Press. (Magyarul: Intézmények, intézményi változás és gazdasági teljesítmény. Budapest: Helikon.)

[17] Williamson, O. E. (2000): *T*he New Institutional Economics: Taking Stock, Looking Ahead. *Journal of Economic Literature.* 38. 3. Pp. 595–613.

[18] Acemoglu, D.–Johnson, S.–Robinson, J. (2004): *Institutions as the Fundamental Cause of Long-Run Growth.* NBER Working Paper 10481. Cambridge: NBER.

[3] Romer, P. M. (1986): Increasing Returns and Long Run Growth. *Journal of Political Economy.* Vol. 94. Pp. 1002–1037.

[5] Lucas, R. E. (1988): On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics.* Vol. 22. Pp. 3–42.

[7] Solow, R. M. (1956): A contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics.* Vol. 70. No. 1

[19] Bjørnskov, C.–Foss, N. J. (2010): *Do Economic Freedom and Entrepreneurship Impact Total Factor Productivity?* Copenhagen : Copenhagen Business School, Center for Strategic Management and Globalization, SMG Working Paper 8/2010.

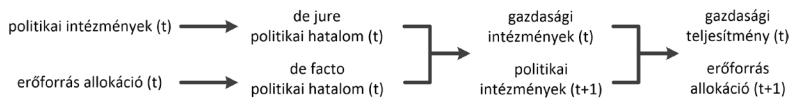
[20] Schumpeter, J. A. (2012–1942): *Capitalism, Socialism and Democracy.* London: Routledge. Pp. 81–84.

[21] Arrow, K. J. (1962): The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies.* Vol. 29. Pp. 155–173.

[22] Porter, M. (1990): *The Competitive Advantage of Nations.* New York: Free Press.

[23] Bjørnskov, Christian–Foss, N. J. (2012): How Institutions of Liberty Promote Entrepreneurship and Growth. *Economic Freedom of the World.*

***2. ábra. Az intézmények hatásmechanizmusa Acemoglu alapján.***




Forrás: saját szerkesztés Acemoglu et al. (2004) P. 6. alapján

Míg számos növekedéselméleti tanulmány a tőke akkumulációt, mások a politikai rendszert vagy az erőforrás-allokációt állítják a gazdasági folyamatok középpontjába, Christian Bjørnskov és Nicolaj J. Foss tanulmánya (2012) [19] az innováció vezérelte növekedési modellek közé sorolható.

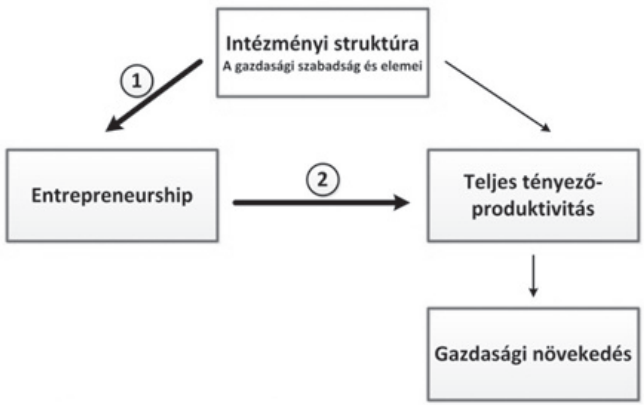
A tudás, az innováció gazdasági hajtóerőként való értelmezése Schumpeter (1942) [20] megközelítésében jelent meg először. A vállalkozói szellem (entrepreneurship), a technológiai haladás, a tudás gazdasági növekedésre gyakorolt hatása azóta is a növekedéselmélettel foglalkozó irodalom szerves része. [7, 21, 3, 5, 22]

Bjørnskov és Foss modelljében az innováció, a vállalkozói szellem (entrepreneurship) az a tényező, amelynek közvetítő szerepével az intézmények hatást gyakorolnak a növekedésre.

Az intézményi rendszer, legfőképpen a gazdasági szabadság határozza meg a termelési tényezők hatékonyságát, következésképpen a gazdasági növekedést.

Ennek a folyamatnak a mozgató rugója a vállalkozói szellem, amelyet közvetlenül az intézményi struktúra, illetve a gazdasági szabadság mértéke befolyásol. Elméletüket egy kétlépcsős modellel vizsgálták regresszióanalízis segítségével. [23]

***3. ábra. Az intézményi struktúra hatásmechanizmusa Bjørnskov és Foss szerint.***




Forrás: saját szerkesztés Bjørnskov és Foss (2012) [23] alapján

## Az intézményi struktúra számszerűsíthetősége

A közgazdaságtan tudományos módszertanát számos más tudományághoz hasonlóan a kvantitatív elemzések irányába történő elmozdulás határozza meg. Szemben más diszciplínákkal, mint például a matematika vagy a fizika, nem kizárólag egzaktul, pontosan mérhető mennyiségeket kell figyelembe vennünk. Számos olyan „puha" tényező fejti ki hatását fontos makrogazdasági változókra, amelyek nem számszerűsíthetőek egyértelműen. Az intézményi struktúra fogalomköréhez tartozó változók jelentős többsége tartozik ide. Ugyan nem tudjuk pontosan mérni, talán egzaktul definiálni sem például a gazdasági vagy a politikai szabadságot, számszerűsítésük mégis messzemenő lehetőségeket nyújthat: az intézményi struktúrával kapcsolatos további kutatásokhoz, ok-okozati viszonyok meghatározásához, különböző országok fejlődésbeli eltérésének magyarázatához járulhat hozzá.

Egy ország gazdasági és társadalmi folyamatait számos intézmény alakítja, amelyek egymással szoros kölcsönhatásban állnak, és nemcsak egymásra hatnak, hanem sok további változó is hatást gyakorol rájuk. Vannak közöttük könnyedén számszerűsíthető tényezők – még ha nem is olyan pontossággal mérhetőek, mint az idő, a hosszúság vagy az áramerősség. Gondoljunk a demográfiai összetételre, a kormányzati vásárlások nagyságára, az inf

[23] Bjørnskov, Christian–Foss, N. J. (2012): How Institutions of Liberty Promote Entrepreneurship and Growth. *Economic Freedom of the World.*

lációs rátára, egy új vállalkozás indításához kapcsolódó költségekre, a különböző adókulcsokra, vagy kamatlábakra. Léteznek azonban olyan tényezők is, amelyeket nem tudunk egyértelműen mérni, jelentőségükre csak tapasztalati úton tudunk következtetni, vagy valamilyen mesterségesen létrehozott értékskála segítségével tudunk számszerű értéket rendelni hozzájuk. Ilyen például a jogalkotás, a bírói és a végrehajtói hatalom függetlensége, a tulajdonjogok védelmi szintje, a rendvédelem ereje, a munkaerőpiac szabályozása, a sajtószabadság, a jegybanki függetlenség vagy a demokrácia intézménye.

Míg számos intézményt jellemző mutatóról hosszú idősorok állnak rendelkezésére (pl. a monetáris politika intézményét jellemző alapkamat mértékéről), a nehezebben számszerűsíthető intézményekről csak az elmúlt évtizedekben készültek globális adatbázisok, amelyek megfelelő alapot nyújthatnak kvantitatív elemzésekhez. Ilyen például a Fraser Institute (2012) [24] által publikált gazdasági szabadság index (*Index of Economic Freedom*) és a politikai szabadság mértékét jellemző, a Freedom House (2013) [25] kutatóintézet által számított polgári szabadságjogok és politikai jogok indexe (*Index of Political Rights and Civil Liberties*). E két, széles körben alkalmazott adatbázis jelenti empirikus elemzésem input adatait is. Fontos megjegyezni azonban, hogy a gazdasági és politikai szabadság, mint fogalom nem azonos az intézményi környezettel. A következőkben ismertetett indikátorok tartalma és értéke alapján azonban következtetni tudunk az intézményi környezet minőségére, a mutatók az intézmények jellemzésére alkalmas proxyként funkcionálhatnak.

A gazdasági szabadság index egy olyan összetett mutatószám, amely egy adott ország politikájának és intézményeinek az ország gazdasági szabadságára gyakorolt hatását méri 1-től 10-ig terjedő skálán. A gazdasági szabadság fogalma alatt olyan tényezők hatásának összességét értjük, mint az egyén személyes választási lehetősége, az önkéntes tranzakciók és a piaci versengés szabadsága, valamint a tulajdonjog védelme. Egy ország gazdasági szabadságának indexe nagyobb értéket vesz fel tehát, ha az egyének szabadon hozhatnak döntéseket, önkéntesen vehetnek részt piaci tranzakciókban, joguk van saját idejük, képességeik és erőforrásaik felett szabadon rendelkezni, azonban nincs joguk más egyének erőforrásaival való rendelkezésre.

A polgári szabadságjogok és politikai jogok indexet 1972 óta, évente publikálja a Freedom House (2013) [25] kutatóintézet csaknem a világ összes országára kiterjedően. Minden egyes ország esetében külön-külön értékkel jellemzik a politikai jogokat és a polgári szabadságjogokat. A két érték átlaga határozza meg adott társadalom politikai szabadságát. Az indikátor értékkészlete 1-től 7-ig terjed, ahol a magasabb értékek jelentenek alacsonyabb politikai és polgári szabadságot.

[24] Fraser Institute–Gwar, J.–Lawson, R.–Hall, J. (2012): *Economic Freedom of the World.* Annual Report.

[25] Freedom House (2013): *Freedom in the World.* Country Ratings Dataset.

## Empirikus elemzés matematikai-statisztikai eszközökkel

A különböző intézményi struktúrákat vizsgálva szembetűnő, hogy jelentős különbségek mutatkoznak az egyes országok intézményrendszerét illetően. Míg egyes országokban magától értetődő például a legitim politikai folyamatokban való szabad részvétel, addig számos társadalomban a szabad véleménynyilvánítás vagy a magántulajdon védelme sem biztosított. Az országokat jellemző gazdasági, politikai, jogi és társadalmi intézmények alapján történő klaszteranalízis segítségével kialakított – más-más intézményi környezettel rendelkező – országcsoportok jellemzői alapján vonom le következtetéseimet.

Az adatok két, a korábbiakban ismertetett forrásból származnak: a Fraser Institute (2012) [24] által évente publikált adatsorokból, valamint a Freedom House (2013) [25] adatbázisaiból. Az intézményi környezet jellemzésére hét osztályozó-változót választottam ki, amelyek leíró statisztikája a következő táblázatban látható. Öt változó a gazdasági és a jogi intézményrendszert jellemzi: az államháztartás nagysága, a jogrendszer és a tulajdonjog védelme, a monetáris stabilitás, a nemzetközi kereskedelem szabadsága, valamint a munkapiac, a pénzpiac és a versenyszféra szabályozását jellemző mutatók. Két változó a politikai és társadalmi intézmények jellemzésére szolgál: a politikai jogok és a polgári szabadságjogok indexei. Fontos megjegyezni, hogy utóbbi két változó értékkészletében az alacsonyabb értékek jelölnek fejlettebb intézményrendszert. Az elemzett adathalmazba a hiányzó értékkel nem rendelkező országok kerültek bevonásra (n=122).

***1. táblázat. Az elemzésbe bevont változók leíró statisztikája.***

| Forrás és értékkészlet | Változó | Átlag | Szórás | n |
|---|---|---|---|---|
| EFW (2011) Index 1 [1;10] | **Government size** (Kormányzati beavatkozás) | 6.408 | 1.365 | 122 |
| EFW (2011) Index 2 [1;10] | **Legal Quality** (Jogrendszer) | 5.893 | 1.909 | 122 |
| EFW (2011) Index 3 [1;10] | **Sound Money** (Monetáris stabilitás) | 8.172 | 1.488 | 122 |
| EFW (2011) Index 4 [1;10] | **Freedom to Trade Internationally** (A nemzetközi kereskedelem szabadsága) | 7.001 | 1.174 | 122 |
| EFW (2011) Index 5 [1;10] | **Regulation** (A tőke-, a munkapiac és a versenyszféra szabályozása) | 6.878 | 0.938 | 122 |

[24] Fraser Institute– Gwar, J.–Lawson, R. –Hall, J. (2012): *Economic Freedom of the World.* Annual Report.

[25] Freedom House (2013): *Freedom in the World.* Country Ratings Dataset.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Freedom House Index (2011) [7;1] | **Political Rights** (Politikai jogok) | 2.811 | 1.869 | 122 |
| Freedom House Index (2011) [7;1] | **Civil Liberties** (Polgári szabadságjogok) | 2.836 | 1.597 | 122 |

Forrás: saját szerkesztés

Az elemzés elkészítéséhez a Rapid Miner Studio 5.3.015© szoftvert használtam. Az input változókat eredeti formájukban alkalmaztam, az értékskálák nem kerültek transzformálásra, mivel az osztályozó-változók értékkészletei nem mutattak jelentős eltérést. Az adatok előzetes feldolgozása és a klaszteranalízis bemeneti változóinak kiválasztása során lehetőségként felmerült egy esetleges faktoranalízis vagy főkomponens-analízis elvégzése a változószám csökkentése érdekében. Ez a vizsgálódás során azért került elvetésre, hogy az intézményi környezetet alkotó tényezők információtartalma teljes mértékben szerepeljen a klasszifikálásnál. Habár, a négynél nagyobb változószám így nem tette lehetővé az adatok grafikus módon történő megjelenítését, vizsgálatát.

Előzetes futtatások és elemzések után a nem hierarchikus klaszterelemzési módszerek közül a k-közép algoritmus került kiválasztásra, négyzetes euklideszi metrikával. Különböző hierarchikus és nem hierarchikus algoritmusokkal egyaránt próbálkoztam (centroid, legközelebbi társ, k-közép módszer, DBSCAN). [26] A klaszterezési algoritmusok összehasonlításánál a klaszter-középpontól vett átlagos távolságot, valamint a Davies–Bouldin-indexet [27] vettem figyelembe (a szoftverben a Cluster Distance Performance operátor által generált értékek). A mutatószámok és a kapott klaszterek jellemzői mellett a klaszterbesorolás kiválasztásakor a végeredmény interpretálhatóságát, szakmai értelmezhetőségét is figyelembe vettem. Háromnál több klaszter esetén (hierarchikus és nem hierarchikus módszereknél egyaránt) mindig adódott olyan klaszter, amelynek elemszáma túlzottan alacsony volt (n<10), kevesebb klaszter esetén pedig nem képződtek kellően homogén csoportok.

Az elemzés eredményeként kapott három klasztert a következő táblázatban szereplő adatok, valamint néhány tipikus eset bemutatásának segítségével jellemzem. Az egyes klaszterekhez tartozó országok részletes listáját a melléklet tartalmazza.

[26] Ester, M.–Kriegel, H. P.–Sander, J.–Xu, X. (1996): *A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise.* In: Simoudis, E.–Han, J.–Fayyad, U. M. (Eds.): Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. (KDD-96). AAAI Press. Pp. 226–231.

[27] Davies, D. L. –Bouldin, D. W. (1979): *"A Cluster Separation Measure"*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. PAMI-1 (2): Pp. 224–227.

***2. táblázat. Klaszter középpontok.***

| | Klaszter középpontok | | |
|---|---|---|---|
| | cluster_0 | cluster_1 | cluster_2 |
| Government Size | 6.17 | 7.22 | 5.86 |
| Legal Quality | 3.82 | 5.08 | 7.29 |
| Sound Money | 6.35 | 7.99 | 8.99 |
| Freedom to Trade | 5.48 | 6.98 | 7.57 |
| Regulation | 6.16 | 6.70 | 7.27 |
| Political Rights | 5.45 | 3.55 | 1.22 |
| Civil Liberties | 4.90 | 3.62 | 1.42 |
| Elemszám | 20 | 47 | 55 |

Forrás: saját szerkesztés

A klaszterközéppontokat megvizsgálva láthatjuk, hogy a 7 dimenzióból 6 esetben (Legal Quality, Sound Money, Freedom to Trade, Regulation, Political Rights, Civil Liberties) a kettesszámú klaszterhez (cluster_2) tartoznak a legmagasabb intézményi fejlettségre utaló értékek. Ezzel szemben a nullával jelölt csoportba (cluster_0) sorolt országok a legalacsonyabb gazdasági és politikai szabadsággal, illetve intézményi fejlettséggel rendelkeznek az említett hat dimenzió mentén. Külön magyarázatot kívánnak a Government Size változóhoz tartozó értékek, ugyanis a dimenziónként rendre legmagasabb szabadsággal rendelkező kettes számú klaszterhez tartozik a legalacsonyabb érték. Másképpen fogalmazva: ezekben az országokban a legmagasabb a kormányzati beavatkozás szintje. A klaszterek mélyebb ismerete alapján az a sejtésünk lehet, hogy az egyes csoportok gazdasági fejlettségük szerint is különböznek. Ezért is érdekes megfigyelésünk, miszerint a kormányzati beavatkozás szintje a feltételezhetően magasabb fejlettséggel rendelkező országok között a legmagasabb. (Megjegyzés: Bjørnskov és Foss (2010) [19] regressziós elemzése szintén a gazdasági produktivitás és a kormányzati beavatkozás szintje közötti negatív kapcsolatot igazolja.)

[19] Bjørnskov, C.–Foss, N. J. (2010): *Do Economic Freedom and Entrepreneurship Impact Total Factor Productivity?* Copenhagen : Copenhagen Business School, Center for Strategic Management and Globalization, SMG Working Paper 8/2010.

Sejtésem igazolásának céljával megvizsgáltam az egyes klaszterekbe tartozó országok egy főre eső reál GDP értékeit. [28] Eszerint valóban a kettesszámú csoport rendelkezik a legmagasabb átlaggal, a nullával jelzett pedig a legalacsonyabb egy főre eső reál GDP-vel. Azonban mindhárom csoportot meglehetősen nagy szórás jellemzi. Ennek okaira a klaszterekhez tartozó egyes esetek részletesebb ismerete adhat választ.

[28] Heston, A.–Summers R.–Aten, B. (2012): *Penn World Table Version 7.1.* Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania.

***3. táblázat. GDP-értékek a klaszterekben.***

| Egy főre eső reál GDP | | |
|---|---|---|
| | átlag | szórás |
| cluster_0 | **4 545.78** | 4 879.82 |
| cluster_1 | **10 018.80** | 14 473.83 |
| cluster_2 | **27 463.68** | 16 155.75 |

Forrás: saját szerkesztés

A nullával jelölt csoportba olyan országok tartoznak, amelyek a legkevésbé fejlett intézményi környezettel rendelkeznek: alacsony a társadalmi tőke, a politikai- és gazdasági szabadság szintje, fejletlen a jogrendszer, a tőkepiac és a munkapiac működése nem hatékony, jelentős a feketegazdaság és a korrupció mértéke, akadályozott a termelési tényezők szabad áramlása, valamint sok esetben még a magántulajdon védelme sem biztosított. Azaz hiányzik a magas információs aszimmetriával jellemezhető helyzetek bizonytalanságát csökkentő intézményi környezet. Ezáltal jelentős tranzakciós költségek kapcsolódnak ezekben az országokban a különböző gazdasági tevékenységekhez (információszerzés és -feldolgozás, kikényszeríthetőség), alapjaiban módosítva a gazdasági szereplők döntési alternatíváihoz tartozó relatív árakat.

Ebbe a csoportba olyan országok tartoznak, mint: Togó (867), Csád (1768), Kongó (2628), Kamerun (2055), Nepál (1321), Madagaszkár (815), Közép-afrikai Köztársaság (675) vagy Burundi (450). (Zárójelben az országok egy főre eső reál GDP adatait jelzem (Heston et al., 2012)). Számos olyan ország is intézményi szempontból a legkevésbé fejlett országok csoportjába tartozik, ahol azonban magasabb a gazdasági teljesítmény: Algéria (7220), Kína (8124), Gabon (15026), Irán (10546), Venezuela (7649) és Oroszország (17004). (Gyakorlatilag ezek az országok húzzák felfelé a csoportátlagot.)

Az outlier értékek magyarázata lehet, hogy az utóbb felsorolt országok mindegyikét valamilyen diktatórikus politikai eszmerendszer uralkodása jellemzi, illetve valamely szűkös erőforrás (kőolaj, földgáz, gyémánt) tekintetében relatíve gazdag országnak tekinthetőek. Ez a két tényező feltehetően nagyban hozzájárul ahhoz, hogy az igen alacsony gazdasági-, politikai- és társadalmi szabadság ellenére magasabb gazdasági teljesítményt produkálnak ezen országok, a hasonló intézményi környezettel, de nyersanyagban szegény országokhoz képest.

Ezeket az országokat azonban, ahol alacsony intézményi fejlettség párosul relatíve magasabb gazdasági teljesítménnyel, általában jelentős társadalmi szakadék is jellemzi. Míg a társadalom egy szűk elit rétegénél hatalmas vagyonok koncentrálódnak, addig a népesség jelentős része mélyszegénységben él.

Ezen ok miatt kiszámítottam a klasztereket jellemző HDI (emberi fejlettségi mutató, amely nulla és egy közötti értékeket vehet fel) értékeket is annak érdekében, hogy reálisabb képet kapjunk az egyes csoportok fejlettségi szintjéről. Az ENSZ által publikált HDI-mutatószám a jövedelmi viszonyok mellett a valós életszínvonalat befolyásoló számos más tényezőt is figyelembe vesz (születéskor várható élettartam, írástudás, iskolázottság).

E mutató alapján is a nullával jelölt csoportot jellemzi a legalacsonyabb átlagérték, míg a kettesszámú klasztert a legmagasabb HDI-érték. Különbség azonban a GDP-vel való jellemzéshez képest, hogy nem jellemzi kirívóan magas szórás a csoportokat. Tehát, ha nem csak a jövedelmi viszonyokat vizsgáljuk, hanem az életminőség más dimenzióit is figyelembe vesszük, jóval élesebben és homogénebben különül el a három klaszter fejlettségi szintje.

***4. táblázat. HDI-értékek a klaszterekben.***

| Emberi fejlettségi index (HDI) | | |
|---|---|---|
| | átlag | szórás |
| cluster_0 | **0.534** | 0.152 |
| cluster_1 | **0.632** | 0.143 |
| cluster_2 | **0.826** | 0.106 |

Az egyes számú klasztert már közepes intézményi fejlettség jellemezi. Olyan országok tartoznak ide, ahol a gazdasági és politikai szabadság bizonyos dimenziói még fejletlenek vagy hiányoznak, más intézmények jellemzői pedig már a fejlett országokéira hasonlítanak. Ilyen például Bahrein, ahol meglehetősen stabil monetáris rendszer és szabad nemzetközi kereskedelem van, azonban a politikai jogok és polgári szabadságjogok szintje már igencsak alacsony.

Ide tartozik Szingapúr is: az országot jól működő jogrendszer és hatékony piaci szabályozás jellemzi, ám a politikai jogok már meglehetősen korlátozottak. Ugyan formálisan az ország demokrácia, gyakorlatilag mégis egypártrendszer érvényesül. Az egyes klaszterben olyan országok találhatóak még, mint Albánia, Argentína, Brazília, Egyiptom, India, Peru, Tájföld és Ukrajna.

A gazdasági teljesítmény tekintetében outliernek számító csoporttagok (Kuwait, Omán, Egyesült Arab Emírségek) szintén nyersanyag ellátottságuknak köszönhetik gazdasági pozíciójukat. Kivétel talán Szingapúr, ahol jelentősebb természeti erőforrás híján, egy tudatos, átfogó gazdaságpolitikai stratégia áll a teljesítmény hátterében.

A kettes számú klaszterbe a fejlett intézményrendszerrel, magas politikai-, gazdasági és társadalmi szabadsággal rendelkező országok tartoznak, úgymint: Ausztrália, Ausztria, Belgium, Bulgária, Kanada, Csehország, Dánia, Finnország, Németország, Görögország, Magyarország, Japán, Spanyolország, az Egyesült Királyság vagy az Amerikai Egyesült Államok. Ugyan a csoporttagokat gazdaságilag fejlett országoknak tekinthetjük, a GDP értékeket itt is erőteljes szóródás jellemzi.

A klaszterek gazdasági fejlettség szerinti különbözőségének matematikai-statisztikai eszközökkel történő vizsgálata a következőekben kerül ismertetésre. A hipotézisvizsgálatok elvégzéséhez az IBM SPSS Statistics Version 20© szoftvert alkalmaztam.

A GDP- és a HDI-értékek alapján egyaránt elvégzett normalitás vizsgálatok eredményeit a következő táblázat tartalmazza. A Kolmogorov-–Szmirnov-próba és a Shapiro–Wilk-próba esetén is elutasításra került a nullhipotézis. Ez az eredmény nem túl meglepő, hiszen a jövedelmi viszonyokat leíró mutatók eloszlása tipikusan nem normális eloszlás (hanem lognormális). Ennek megfelelően nem paraméteres próbák alkalmazásával folytattam tovább a vizsgálódást.

***5. táblázat. Normalitás vizsgálat.***

**Tests of Normality**

| | | Kolmogorov-Smirnov[a] | | | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Cluster | Statistic | df | Sig. | Statistic | df | Sig. |
| RealGDPpercap | ,00 | ,303 | 20 | ,000 | ,777 | 20 | ,000 |
| | 1,00 | ,273 | 47 | ,000 | ,588 | 47 | ,000 |
| | 2,00 | ,082 | 55 | ,200* | ,922 | 55 | ,002 |
| HDI | ,00 | ,135 | 20 | ,200* | ,934 | 20 | ,184 |
| | 1,00 | ,136 | 47 | ,029 | ,942 | 47 | ,021 |
| | 2,00 | ,144 | 55 | ,006 | ,845 | 55 | ,000 |

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Forrás: saját elemzés eredménye

A klaszterek a Kruskal–Wallis-rangsoroláson alapuló próba segítségével kerültek összehasonlításra. A kettőnél több független minta homogenitás-vizsgálatára szolgáló próba nullhipotézise, hogy a minták azonos eloszlásból származnak. A statisztika rangszámai alapján megállapíthatjuk, hogy valóban a nullával jelölt klaszterben a legalacsonyabbak a GDP- és HDI-értékek is, míg a kettes számú klaszterben a legmagasabbak.

***6. táblázat. Kruskal-Wallis próba: rangszámok.***

| | Cluster | N | Mean Rank |
|---|---|---|---|
| HDI | ,00 | 20 | 28,58 |
| | 1,00 | 47 | 43,91 |
| | 2,00 | 55 | 88,50 |
| | Total | 122 | |
| RealGDPpercap | ,00 | 20 | 29,83 |
| | 1,00 | 47 | 44,81 |
| | 2,00 | 55 | 87,28 |
| | Total | 122 | |

A Kruskal–Wallis-statisztika számított értékei alapján mindkét esetben el kell vetnünk a nullhipotézist. Alacsonyak a szignifikancia értékek, azaz a GDP- és a HDI-értékek valóban másként alakulnak az egyes klaszterekben.

***7. táblázat. Kruskal–Wallis-próba: szignifikancia értékek.***

**Test Statistics**[a,b]

| | HDI | RealGDPperc ap |
|---|---|---|
| Chi-Square | 61,028 | 55,754 |
| df | 2 | 2 |
| Asymp. Sig. | ,000 | ,000 |

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: Cluster

Forrás: saját elemzés eredménye

## Összegzés

A tanulmány első részében az intézményi struktúra hatásmechanizmusát leíró elméleti modellek áttekintésére, illetve az intézmények gazdasági teljesítményt befolyásoló szerepét magyarázó elméletek vizsgálatára került sor.

Az intézményi struktúra meghatározó szerepét hangsúlyozó elméletekkel összhangban kvantitatív elemzési eszközökkel elemeztem és támasztottam alá az intézményi struktúra és a gazdasági fejlettség kapcsolatát. Fontos azonban megjegyezni a kapcsolat tényének rögzítése mellett, hogy az ok-okozati viszonyok feltárása csak magasabb szintű kutatások adhatnak választ.

# Melléklet

## A klaszteranalízis eredménye

*Cluster_0:*
Algeria, Burundi, Cameroon, Central African Republic, Chad, China, Congo, Democratic Republic of the Congo, Fiji, Gabon, Guinea-Bissau, Iran, Madagascar, Nepal, Pakistan, Russia, Tanzania, Togo, Venezuela, Zimbabwe.

*Cluster_1:*
Albania, Argentina, Bahrain, Bangladesh, Bolivia, Brazil, Colombia, Cote d'Ivoire, Dominican Republic, Ecuador, Egypt, El Salvador, Guatemala, Haiti, Honduras, India, Indonesia, Jamaica, Jordan, Kenya, Kuwait, Malawi, Malaysia, Mali, Mexico, Morocco, Mozambique, Nicaragua, Niger, Nigeria, Oman, Papua New Guinea, Paraguay, Peru, Philippines, Rwanda, Senegal, Sierra Leone, Singapore, Sri Lanka, Thailand, Tunisia, Turkey, Uganda, Ukraine, United Arab Emirates, Zambia.

*Cluster_2:*
Australia, Austria, Bahamas, Barbados, Belgium, Belize, Benin, Botswana, Bulgaria, Canada, Chile, Costa Rica, Croatia, Cyprus, Czech Republic, Denmark, Estonia, Finland, France, Germany, Ghana, Greece, Guyana, Hong Kong, Hungary, Iceland, Ireland, Israel, Italy, Japan, Latvia, Lithuania, Luxembourg, Malta, Mauritius, Namibia, Netherlands, New Zealand, Norway, Panama, Poland, Portugal, Republic of Korea (South Korea), Romania, Slovakia, Slovenia, South Africa, Spain, Sweden, Switzerland, Taiwan, Trinidad and Tobago, United Kingdom, United States of America, Uruguay.

BARTALOS NORBERT *–UJBÁNYI TIBOR **–KŐVÁRI ATTILA ***–NAGY BÁLINT ****

# *A Chua-rendszer vizsgálata az Octave alkalmazásával*

**Összefoglalás:** Jelen dolgozatban a kaotikus rendszerek egyik jól ismert példáját, a Chua-áramkört és annak viselkedését leíró differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk az Octave alkalmazásával.
**Kulcsszavak:** Dinamikai rendszerek, attraktor, kaotikus rendszerek, Chua-áramkör.

**Abstract:** In this work a well-known example of chaotic systems, the Chua-circuit and its differential equation describing the behavior of this circuit is investigated using Octave.
**Keywords**: Dynamical system, attractor, chaotic systems, Chua circuit.

## Alkalmazott eszközök

Az Octave [1] programot alapvetően a Matlabhoz hasonlóan numerikus számítások végrehajtására tervezték, de megfelelő csomagok telepítésével képességei bővíthetőek. A Matlabhoz hasonlít nemcsak a cél, hanem a program teljes felépítése is.
2014-ben adták ki az Octave 3.8.2 verzióját, mely már grafikus felhasználói felülettel rendelkezik. Elérhető a Matlab esetén megszokott Command Window, Workspace, Command History ablak és az Editor is.

A Matlabban megírt szkriptek, .m fájlok kevés módosítással (gyakran módosítás nélkül) az Octaveban is alkalmazhatóak.

* *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: ihuntlexaa@gmail.com

** *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: ujbanyi.tibor@mal.duf.hu

*** *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: kovari.attila@mail.duf.hu

**** *Dunaújvárosi Főiskola, Informatikai Intézet*
E-mail: nagy.balint@mail.duf.hu

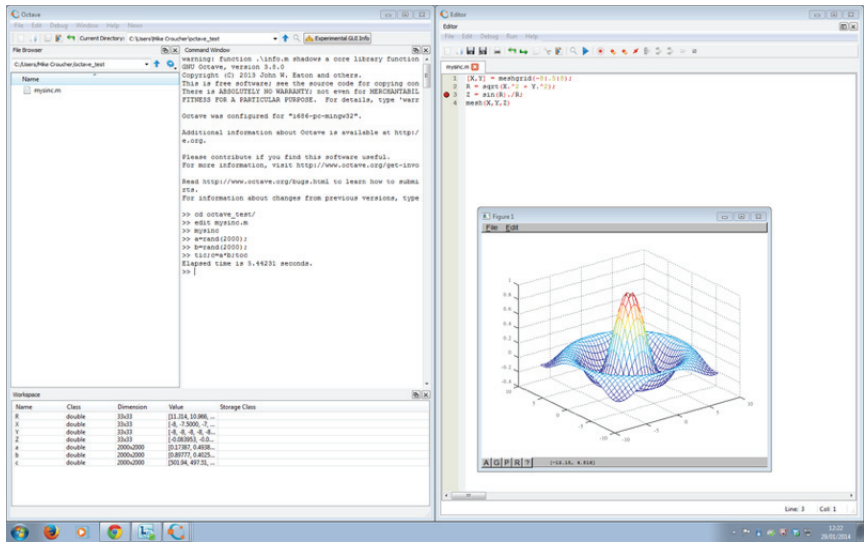
[1] https://www.gnu.org/software/octave/ 2015. március 2.

[2] http://www.walkingrandomly.com/?p=5336 2015. március 2.

[3] http://octave.sourceforge.net/odepkg/ 2015. március 2.

[4] http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/meini/ODE12/odepkg.pdf 2015. március 2.

***1. ábra. az Octave 3.8.2 grafikus felülete. [2]***



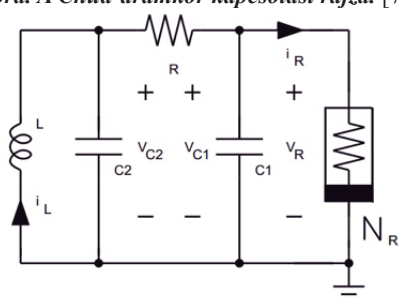
Jelen dolgozatban az Octave alkalmazásával differenciálegyenletek trajektóriáit vizsgáljuk. Ehhez az odepkg [3] csomag szükséges. A szükséges csomag legújabb verziója, az odepkg-0.8.4.tar.gz letölthető a [3] címről. A csomag telepítése az Octave indítása után, annak Command Window ablakában végrehatjatható a

```
>>pkg install odepkg-0.8.4.tar.gz
```

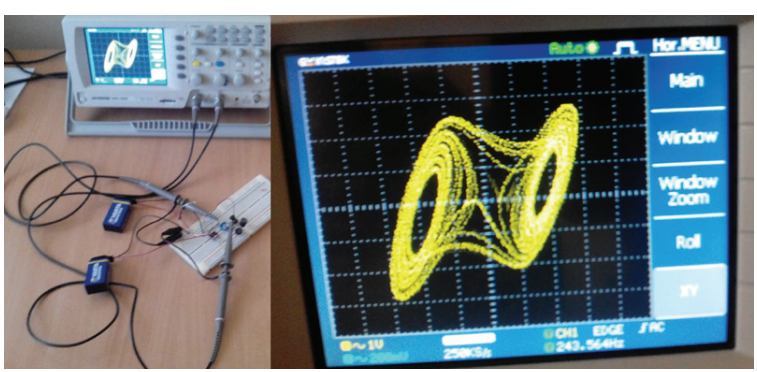
## A Chua-áramkör

Ebben a fejezetben az egyik legegyszerűbb kaotikus rendszert, a Chua-rendszert vizsgáljuk [5, 6]. Az áramkört 1983 őszén építette meg Leon O. Chua. Célja egy olyan laboratóriumi rendszer elkészítése volt, mellyel bizonyítható, hogy a káosz egy fizikai jelenség, nem számítási hibák forrása.
A megépített áremkör egy része passzív lineáris karakterisztikájú egyszerű elektronikai alkatrészekből épül fel. Ezek az elemek a kondenzátor (C1 és C2), az ellenállás (R) és a tekercs (L, ahol I a tekercs árama). Az áramkörben található egy aktív, nemlineáris karakterisztikájú áramköri elem is, az úgynevezett Chua-dióda (a 2. ábrán NR). Ezen dióda néhány ellenállás és két műveleti erősítő segítségével szintén felépíthető.

***2. ábra. A Chua-áramkör kapcsolási rajza.*** [7]




***3. ábra. A megépített áramkör és az oszcilloszkóp képe. [Saját készítés.]***




[5] Chua, L.O.– Komuro, T. M. (1986): The Double Scroll Family. *IEEE Transactions on circuits and systems.* Vol. CAS-33. No. 11.

[6] Chua, L. O. (2007): *Scholarpedia.* 2 (10):1488. http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit

[7] Kennedy, M. P. (1992): Robust OP Amp realization of chua's circuit. *Frequenz.*, 46 (3). Pp. 66–80.

Az áramkör viselkedésének leírására Leon O. Chua az alábbi közönséges differenciálegyenlet-rendszert írta fel [5]:

$$\dot{x} = \alpha\big(y - \phi(x)\big)$$
$$\dot{y} = x - y + z$$
$$\dot{z} = -\beta y$$

ahol $\phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$.

A paraméterek bizonyos értéke esetén a rendszer kaotikus tulajdonságokat mutat, amint ezt Chua et al. $\alpha = 9, \beta = \frac{28}{7}, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ esetén bzonyította [6].

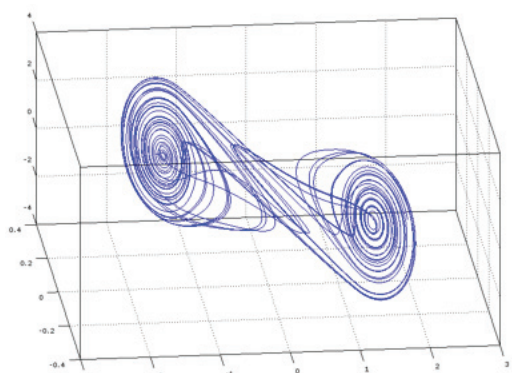
Egy kis változtatással felírható az a modell, amelyet többek között [8] könyve tárgyal:

$$\dot{x} = \alpha\big(y - x - \phi(x)\big)$$
$$\dot{y} = x - y + z$$
$$\dot{z} = -\beta y$$

ahol $\phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$ .

Lynch egy rövid Matlab szkriptet is közöl, mellyel a difrerenciálegyenlet-rendszer trajektóriái ábrázolhatók. Ezen szkript egyszerűen futtatható az Octave programmal is. (*4. ábra*).

***4. ábra. A Chua-egyenletek trajektóriái α=14 esetén.***



[5] Chua, L.O.–Komuro, T. M. (1986): The Double Scroll Family. *IEEE Transactions on circuits and systems.* Vol. CAS-33. No. 11.

[6] Chua, L. O. (2007): *Scholarpedia.* 2 (10):1488. http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit

[8] Lynch, S. (2004): *Dynamical systems with applications using Matlab*. Boston: Birkhuser.

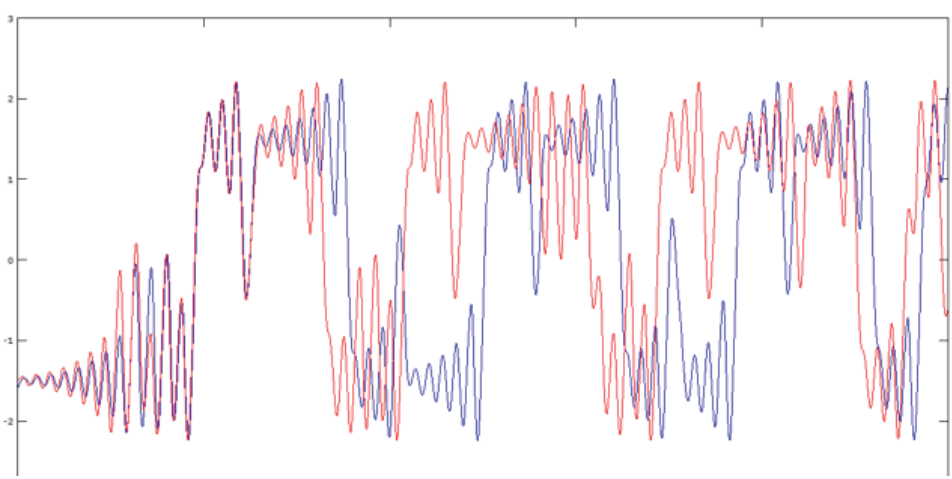
fenti szkript segítségével vizsgálható a Chua-egyenletek megoldása különböző paraméterértékek és
ti feltételek esetén. A híres „double-scroll attractor” az alábbiak szerint ábrázolható:

```
a=@(t,x)[14*(x(2)-x(1)-(-(5/7)*x(1)+(1/2)*(-(8/7)-(-
)*(abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1))));
-x(2)+x(3);-25.58*x(2)];
ons = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
b]=ode45(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
3(xb(:,1),xb(:,2),xb(:,3))
```

az attraktor matematikai értelemben kaotikus. Megmutatható például, hogy közeli kezdeti feltételek
ı a megoldások eltávolodnak egymástól.
tsük ugyanis a fenti egyenlet alábbi megoldásait. (*5. ábra*)

```
xa]=ode23(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
xb]=ode23(Chua,[0 100],[-1.5,0,1.6],options);
(ta, xa(:,1))
 on
(tb, xb(:,1),"r")
```

***5. ábra. Érzékenység a kezdeti feltételre a Chua-rendszerben.***



[9] Simon L. P.–Tóth J. (2005). *Differenciálegyenletek.* Budapest: Typotex.

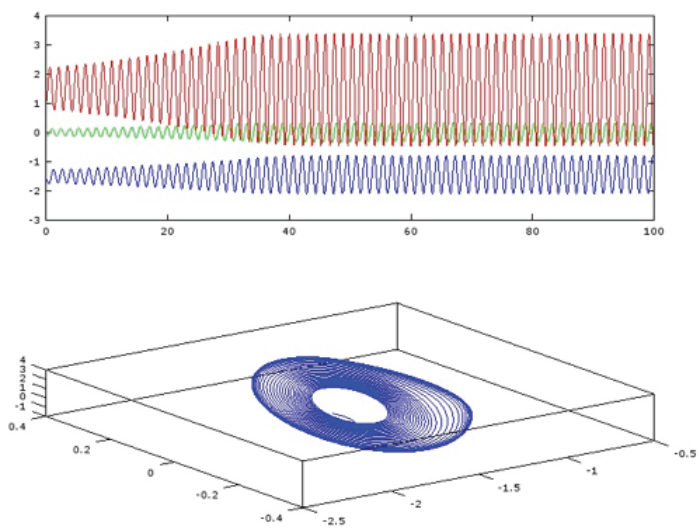
[10] Huang, A.–Pivka, L.–Wu, C. W.–Franz, M. (1996): Chua's equation with cubic nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 6 (12a). Pp. 2175–2222.

(Természetesen a megoldások ezen tulajdonságáról a Ljapunov-együttható is tájékoztat, azonban ennek részletezésétől itt eltekintünk.

Az érdeklődő olvasó számára javasoljuk a [9] könyv elmélyült tanulmányozását.)

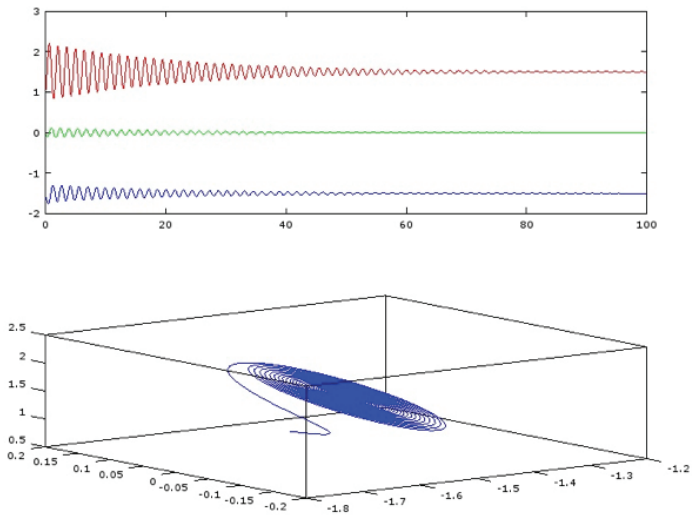
Megfelelő paraméter változtatásával a rendszer más viselkedést mutat. Például $\alpha$=10 esetén a rendszernek stabil határciklusa van, amint ez a *6. ábra* alapján sejthető.

***6. ábra. Stabil határciklus α=10 esetén.***




Ha $\alpha$=9, akkor a rendszernek stabil egyensúlyi pontja van. (*7. ábra*)

*7. ábra. Stabil egyensúlyi pont α=9 esetén.*




## A Chua-rendszer módosítása

A Chua-egyenletekben szereplő $\phi(x)$ függvény – az egyetlen nemlineáris függvény a rendszerben – alapvető fontosságú a rendszer viselkedése szempontjából. Ezen viselkedés leírására több módszer használja az egyenletek jobboldala által meghatározott függvények deriváltjait. Tekintettel arra, hogy a $g(x)=|x+1|-|x-1|$ függvény nem folytonosan deriválható, célszerű a rendszert $\phi(x)$ megfelelő módosításával alakítani. Ezzel a megfontolással számos folytonosan deriválható módosítást írtak már fel. Huang, Pivka és Wu harmadfokú hatványfüggvény segítségével készítettek megfelelő módosítást [10]

$$\dot{x} = \alpha(y - x^3 - x)$$
$$\dot{y} = x - y + z$$
$$\dot{z} = -\beta y$$

Ebben a rendszerben $\alpha$=10, $\beta$=16, $c$=-0.143 értékek esetén található meg a „double-scroll attractor”.

A továbbiakban megadunk egy új folytonosan deriválható módosítást, továbbá ennek megoldásait vizsgáljuk numerikusan. Vázoljuk a *g(x)*=|*x*+1|-|*x*-1| függvény grafikonját. Vegyük észre, hogy a függvény – többek között – az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik: $lim_{x\to-\infty}\, g(x) = -2,\ lim_{x\to\infty}\, g(x) = 2.$ Hasonló tulajdonságokkal rendelkező függvény állítható elő az $x \mapsto \mathrm{atan}(x)$ függvény lineáris transzformációjával. A további vizsgálatainkhoz az $f(x) = r \cdot \mathrm{atan}\,(x)$ függvényt használjuk a *g(x)*=|*x*+1|-|*x*-1| helyett, míg a Chua-rendszerben szereplő további egyenleteket változatlanul hagyjuk. Egyenleteink tehát a következő alakban írhatóak fel:

$$\dot{x} = \alpha\big(y - x - \phi(x)\big)$$
$$\dot{y} = x - y + z$$
$$\dot{z} = -\beta y$$

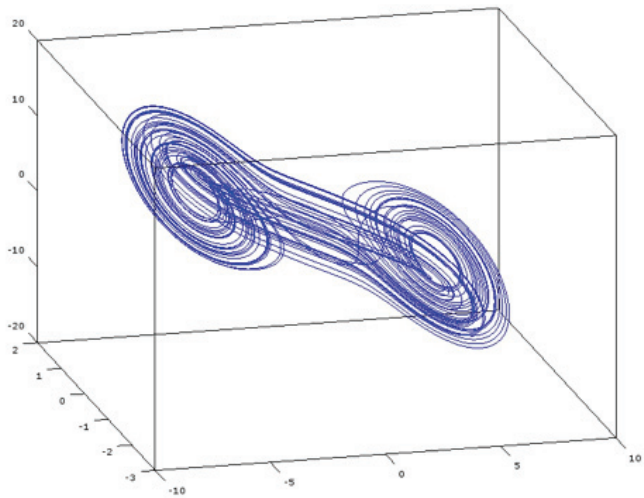
ahol $$\phi(x) = m_1 x + \frac{r}{2}\mathrm{atan}\,(x)(m_0 - m_1)$$

A korábban használt szkirptet ezért módosítjuk.

```
Chua=@(t,x)[alpha*(x(2)-x(1)-(-(5/7)*x(1)+(1/2)*(-(8/7)-(-
5/7))*(r*atan(x(1)))));x(1)-x(2)+x(3);
-25.58*x(2)];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xb]=ode45(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
plot3(xb(:,1),xb(:,2),xb(:,3))
```

A paraméterek megfelelő változtatásával ebben a rendszerben is nyerhető „double-scroll attractor”.
(*8. ábra*)

***8. ábra. A módosított Chua-rendszerben található ún. „double – scroll attractor" α=15.***



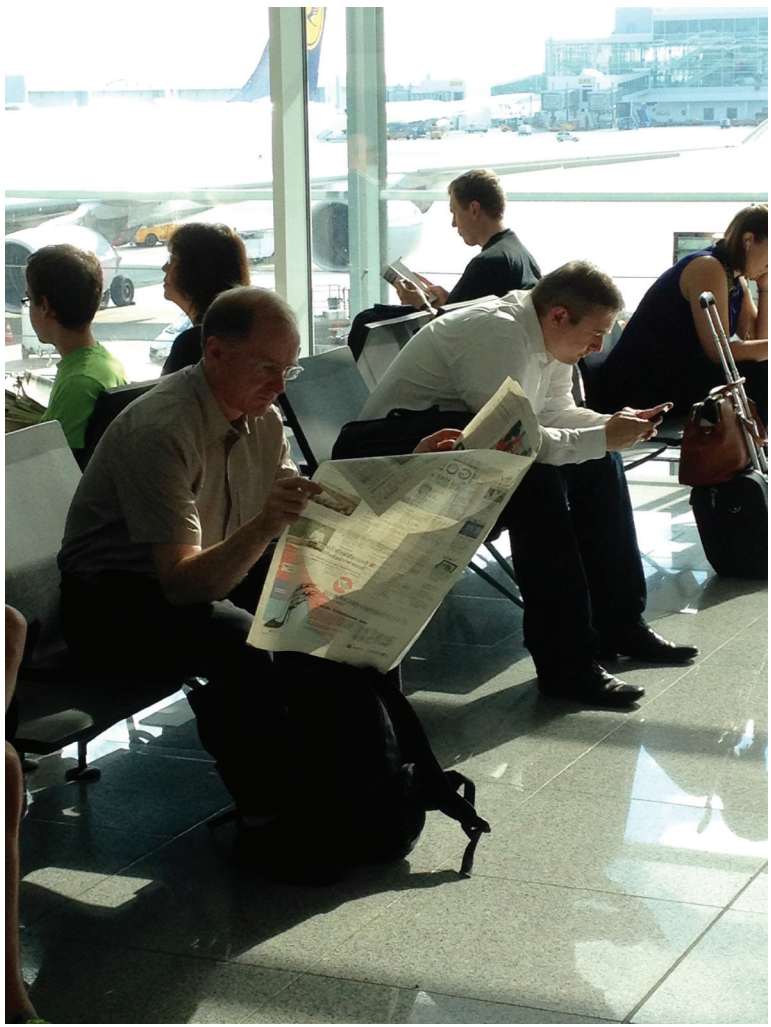

## Eredmények

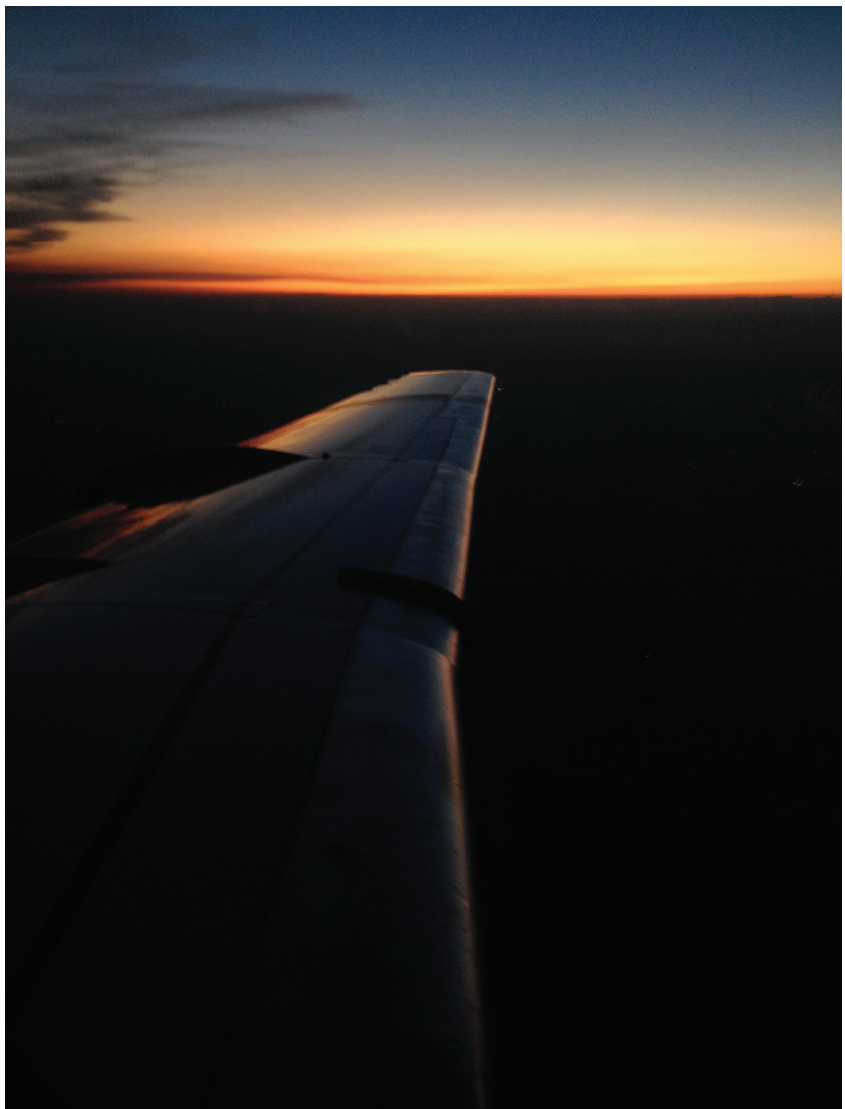
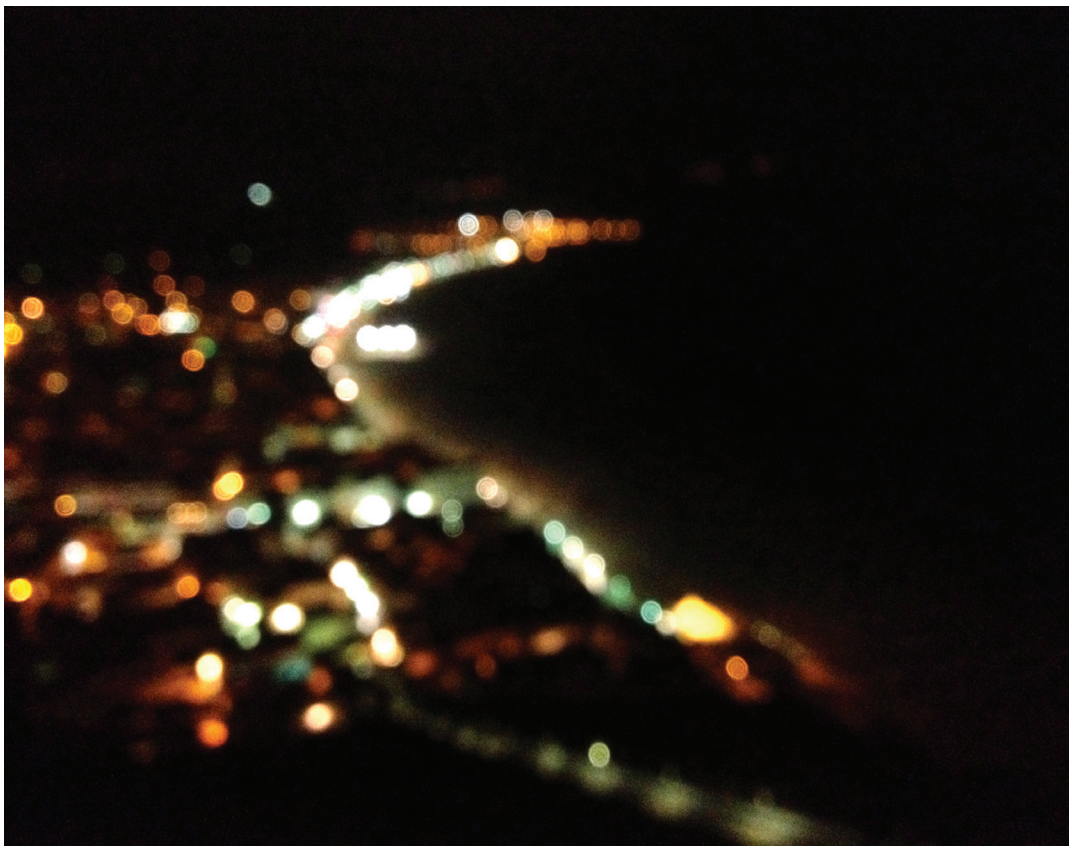
Jelen dolgozatban a Chua-áramkört leíró differenciálegyelet-rendszer egy új módosítását adtuk meg, mely további matematikai analízist tesz lehetővé.

A rendszer tulajdonságainak szemléltetéséhez az Octave programot használtuk.

# *Galéria*

***Duma Bálint fotói***



LSG
Sky Chefs

Gate
G18