Dunakavics

A Dunaújvárosi Egyetem online folyóirata 2019. VII. évfolyam XII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

Kozsely Gábor
A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

Árvai-Homolya Szilvia–Körei Attila–Lengyelné Szilágyi Szilvia
Élménypedagógiai játékok konstruálása

Hudoba György
Marskutatás otthonról – a „MarsRengések" program

Kovács Imre
Önszerveződés HOPG-felületen létrehozott molekuláris rétegekben 1. rész

Dunakavics

A Dunaújvárosi Egyetem online folyóirata 2019. VII. évfolyam XII. szám

Megjelelenik évente 12 alkalommal

Szerkesztőbizottság
András István, Balázs László, Nagy András, Nagy Bálint, Németh István,
Rajcsányi-Molnár Mónika, Szabó Csilla Marianna.

Felelős szerkesztő Németh István
Tördelés Duma Attila

Szerkesztőség és a kiadó címe 2400 Dunaújváros, Táncsics M. u. 1/a.

Kiadja DUE Press, a Dunaújvárosi Egyetem kiadója
Felelős kiadó Dr. habil András István, rektor

A lap megjelenését támogatta a Nemzeti Kulturális Alap

TÁMOP-4.2.3-12/1/KONV-2012-0051
„Tudományos eredmények elismerése és disszeminációja
a Dunaújvárosi Főiskolán”.
http://dunakavics.due.hu
ISSN 2064-5007

Tartalom

KOZSELY GÁBOR
A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével 5

ÁRVAI-HOMOLYA SZILVIA–KÖREI ATTILA–LENGYELNÉ SZILÁGYI SZILVIA
Élménypedagógiai játékok konstruálása 23

HUDOBA GYÖRGY
Marskutatás otthonról – a „MarsRengések" program 37

KOVÁCS IMRE
Önszerveződés HOPG-felületen létrehozott molekuláris rétegekben 43

Galéria 51
(Németh István fotói – Manhattan)

KOZSELY GÁBOR *

A népesedési folyamatok vizsgálata Leslie- és Verhulst-modellek egyesítésével

* *Dunaújvárosi Egyetem, Műszaki Intézet, Anyagtudományi Tanszék*
E-mail: kozselyg@uniduna.hu

Összefoglalás: Közismert tény, hogy a magyar népesedési helyzetet hosszabb idő óta kedvezőtlen demográfiai mutatók, negatív tendenciák jellemzik. A népesség létszámának közel harminc éve tartó csökkenésének egyik alapvető oka a születések igen alacsony száma. Célom volt, hogy megfelelő modellt találjak és ezáltal én is saját számítást tudjak végezni a népesség és ezen belül a korcsoportok számának becslésére. A választásom egy az ökológiában gyakran használt modellre eset, amelyet Leslie dolgozott ki. A modell egyik hátránya, hogy időben nem változó termékenységi és halandósági paraméterek esetén az exponenciális növekedést adó Malthus-modellhez tart. Ezért tudományosan megalapozott féket kellett a rendszerbe tenni, ezt a Verhulst-modell szolgáltatta, a környezeti eltartóképességi paraméter bevezetésével. A szakirodalomban publikált, különböző bonyolultságú modellek becsléseivel jó egyezést mutat a Leslie-Verhulst-modell. Körülbelül 30 éves időtávra eredményesen használható mind az össznépesség, mind a korcsoportok számának becslésére.
Kulcsszavak: Népesség-modellezés, Malthus- és Verhulst-modellek; kohorsz-komponens módszer.

Abstract: It is a well-known fact that the population of Hungary has been characterized by unfavourable demographic indicators and negative tendencies for a long time. The very low number of births is one of the main reasons for the decline of the population nearly 30 years. My goal was to find the useful model, and so I will estimate the number of people in the population, including the age groups. My choice is a case of an ecology model that Leslie has worked out. One of the drawbacks of the model is that it maintains the exponential growth of the Malthus model in the case of time-dependent fertility and mortality parameters. That is why the system had to be scientifically based, provided by the Verhulst model, with the introduction of the en-

vironmental retention parameter. The Leslie-Verhulst model has a good match with the estimates of models of various complexities published in the literature. It can be used effectively to estimate the total population and age group for about 30 years.
Keywords: Population modelling; Malthusian growth model and Verhulst logistic growth model; Cohort component population projection method.

Bevezető

Közismert tény, hogy a magyar népesedési helyzetet hosszabb idő óta kedvezőtlen demográfiai mutatók, negatív tendenciák jellemzik. A népesség létszámának közel harminc éve tartó csökkenésének egyik alapvető oka a születések igen alacsony száma. A termékenység csökkenésének okai rendkívül összetettek, amelyek feltárásával számos demográfiai, közgazdasági és szociológiai kutatás foglalkozik. A tanulmányok részben társadalmi – a családalapítási szokások átalakulása, az iskolázottsági szint emelkedése, a szüléskori életkor kitolódása, a személyes értékrend, illetve a nők társadalmi szerepének változása –, részben gazdasági – a munkaerőpiac beszűkülése, az egzisztenciális félelem, a gyermekellátó rendszer hiányosságai – tényezőkkel magyarázzák a gyermekvállalási kedv visszaesését.

Elméleti háttér, témához kapcsolódó információk

A demográfia görög eredetű szó a démosz (δῆμος) nép, népesség és a gráfó (γράφω) leírás. összeírás, mérés szavak összetételéből származik, azaz a népesség leírását jelenti.

A definíciója szerint a demográfia olyan tudomány, amely a népességet, a népesedési folyamatokat populációs szinten vizsgálja. Kiterjed a népesség méretére, szerkezetére és eloszlására, valamint a születések, halálozások, vándorlás és öregedés hatására történő változására. A demográfiai elemzés vonatkozhat a teljes társadalomra, vagy annak egyes – oktatási, nemzetiségi, vallási vagy etnikai szempontok alapján lehatárolt – csoportjaira. A formális demográfia vizsgálódását leszűkíti a népesedési folyamatok mérésére, míg a tágabb értelemben vett népesedéstudomány a népességet befolyásoló gazdasági, társadalmi, kulturális és biológiai folyamatok összefüggéseit is vizsgálja. [1, 2, 3]

[1] L. Rédei Mária (2001): *Demográfia.* Budapest: ELTE Eötvös.

[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana.* Budapest: Osiris. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagtana/adatok.html

[3] Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (2004): *The Methods and Materials of Demography*, Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. P. 1–8.

A demográfiai adottságok elemzése különféle mutatószámokkal

A demográfiai helyzetkép elemzésére különböző általános és sajátos mutatószámok szolgálnak eszközként.

Az általános mutatószámok a népesség összetételének jellemzésére szolgálnak. A népesség összetételének tanulmányozásában a két legalapvetőbb ismérv: a nem és az életkor szerinti megoszlás.

A nemek arányát több tényező határozza meg. Az egyik a fiúszületési többlet, vagyis az a jelenség, hogy minden társadalomban általában több fiú születik, mint lány. A születéskori fiú-lány arány 52–48%. A másik alapvető tényező a két nem halandósági különbsége, az, hogy a modern társadalmakban minden korcsoportban magasabb a férfiak halandósága. Ezek alapján alakul ki egy népességben a nemek aránya, általában úgy, hogy a fiatal népességben férfitöbblet van, a korral előrehaladva pedig egyre nagyobb nőtöbblet alakul ki. Általánosságban az is jellemző, hogy a fejlődő országokban férfitöbblet mutatkozik, az öregedő társadalmakban női.

A népesség életkor szerinti megoszlásának vizsgálatánál a népesség korcsoportok szerinti felosztásának több formája szokásos. Az emberi életkorokat leggyakrabban biológiai alapon osztják fel: gyermek-, felnőtt- és időskorra. Fontos tudnunk, hogy az egyes szervezetek által használt különféle korcsoportok tagolása nem egységes, ennek az a legfőbb oka, hogy egyes korok és társadalmak közvélekedése nagy különbséggel ítélte/ítéli meg, hogy meddig tart a gyermekkor, vagy például ki számít már idősnek.

A demográfusok nagyon gyakran használják számításaikban a szülőképes kor fogalmat, amely a 15–49 éves nőket jelenti.

A demográfiai helyzetkép alakulásában, a változások ok-okozati összefüggéseinek feltárásában olyan sajátos mutatószámok szolgálnak eszközként, mint a termékenységi-, a reprodukciós-, és a mortalitási mutatók.

Termelékenységi mutatók

A születési mozgalom vizsgálatánál alkalmazott mutatókat két csoportra szokás osztani. A születési arányszám a népesség egészéhez viszonyítva fejezi ki a születések gyakoriságát, amíg a termékenységi arányszámok nem a népesség egészéhez, hanem a szülőképes korú nőkhöz, vagy azok csoportjaihoz viszonyítva mutatják a születési gyakoriságot. A cikkben csak ezek közül a két legfontosabbat emeltem ki.

Korspecifikus termékenységi arányszám (ASFR; Age-specific fertility rate): egy adott életkorhoz tartozó nők termékenységét fejezi ki. Ezzel a mutatóval a gyermekvállalási magatartás életkor szerinti változását írjuk le, illetve hasonlítjuk össze. Így kiküszöbölhetők a korösszetétel változásából adódó hatások. Általában 15 és 49 év között ötéves korcsoportokat felölelő egységekre szokás kiszámítani (15–19; 20–24; 25–29; 30–34; 35–39; 40–45; 40–49).

[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana.* Budapest: Osiris. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagtana/adatok.html

[5] Dharmalingam, A (2004): Reproductivity. In: Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography*. Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 17. Pp. 429–453.

[6] Estee Sharon (2004): Natality. Measures Based on Vital Statistics. In: Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography.* Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 15. PP. 371–405.

[7] Kapitány Balázs (Szerk.)(2015): *Demográfiai fogalomtár.* Budapest: KSH Népességtudományi Kutatóintézet. 2015 www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar

[8] Faragó Miklós (2011): Paritásfüggő összetett termékenységi mutatók Magyarországon és különbségeik dekompozíciója. *Közgazdasági Szemle.* LVIII. évf., 2011. november; Pp. 970–993.

[9] Berde Éva–Németh Petra (2015 június): A termékenységi arányszám kiszámításának különböző módszerei. *Köz-Gazdaság* X. évfolyam 2. szám.

Így n=7 korcsoport keletkezik. Az adott korcsoporthoz tartozó korspecifikus termékenységi arányszám az adott korosztályhoz tartozó anyák által szült gyermekek számának és az adott korosztályhoz tartozó nők számának hányadosaként számolható; (1) egyenlet. Általában ezrelékben szokás megadni: [2, 6, 7]

$$ASFR_i = \frac{B_i}{N_i^F} \cdot 1000 \qquad (1)$$

Teljes termékenységi arányszám (TFR; Total fertility rate): Makroszinten egy ország termékenységének legrégebbi és az egyik leggyakrabban használt, egy naptári évre vonatkozó mutatószáma. Azt mutatja meg, hogy ha az adott év termékenységi adatai állandósulnának, akkor egy nő élete folyamán átlagosan hány gyermeknek adna életet.

Egy adott év korspecifikus élveszületési arányszámainak összegéből képezhető a teljes termékenységi arányszám, amit szintén általában 1000 nőre kifejezve szoktak megadni, bár gyakori az 1 nőre történő megadás is; (2) egyenlet. [2, 5, 6, 7]

$$TFR = \sum_{i=1}^{n} AFSR_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{N_i^F} \cdot 1000 \qquad (2)$$

A TFR-mutatót régóta bírálják azért, mert kiszámítási módja nem tükrözi azt a tapasztalatot, hogy a nők szülési valószínűségei az életkorukon kívül a már meglévő gyermekeik számától, azaz – demográfiai szakkifejezéssel – a paritásuktól is függnek. Ezt részletesen a [8, 9] szakirodalmak taglalják.

Mortalitási mutatók

Egy adott populációban megfigyelhető halálozások gyakoriságára vonatkozó statisztika. A különböző társadalmi csoportokra számított halálozási mutatók szoros kapcsolatban állnak az adott népesség fejlettségével, életszínvonalával és egyenlőtlenségi viszonyaival. A haláloki osztályozás a morbiditási mutatószámok számításánál is alkalmazott kódrendszer alapján történik.

Nyers (általános) halálozási arányszám (még a halálozási ráta kifejezés is használatos) (CDR; crude death (mortality) rate): ezer lakosra jutó halálozások száma az évközépi népességre számítva; (3) egyenlet.

$$\text{Nyers halálozási arányszám} = \frac{\text{Az adott évi halálozások száma}}{\text{Évközi népesség száma}} \cdot 1000 \rightarrow \text{CDR} = \frac{D}{N} \cdot 1000 \qquad (3)$$

Nem csak egy évre, hanem hosszabb periódusra (5–10 évre) is kiszámolható, ekkor az éves nyers halálozási arányokat az évek számával kell súlyozni. A mutató különösen érzékeny a teljes népesség korösszetételére. Ebből adódóan országok közötti összehasonlításra csak korlátozott mértékben alkalmas. Az összehasonlíthatóságot ilyen esetben standardizálással biztosítjuk. [1, 7, 11]

Mivel a halálozás nemenként különbözik, a korspecifikus halálozási arányszámokat a nőkre és a férfiakra általában külön-külön készítik el és publikálják; (4. a; b) egyenlet.

$$\text{CDR}_i^F = \frac{D_i^F}{N_i^F} \cdot 1000 \qquad (4.a)$$

$$\text{CDR}_i^M = \frac{D_i^M}{N_i^M} \cdot 1000 \qquad (4.b)$$

Népesedési elméletek és modellek

A népesség számának alakulását az élveszületések és a halálozások, valamint a bevándorlások és kivándorlások számának alakulása határozza meg. Ezek a paraméterek az időben folyamatosan változnak. Ennek megfelelően a népesség számának alakulása a tényezők figyelembevételével határozható meg; (5) egyenlet:

$$N_{t+1} = N_t + B_t - D_t + I_t - E_t \qquad (5)$$

A zárt népesség esetén, illetve, ha elhanyagoljuk a be- és kivándorlást, akkor a következő (6) egyenlettel leírt alapösszefüggést kapjuk.

$$N_{t+1} = N_t + B_t - D_t \qquad (6)$$

[1] L. Rédei Mária (2001): *Demográfia.* Budapest: ELTE Eötvös.

[7] Kapitány Balázs (Szerk.)(2015): *Demográfiai fogalomtár.* Budapest: KSH Népességtudományi Kutatóintézet. 2015 www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar

[11] Andersen, Paul: Bozeman Science; *Human Population Dynamics.* https://www.youtube.com/watch?v=DqKg5rWLpEo (Közzététel: 2015. okt. 5.)

A fenti összefüggés felhasználásával további népességmodellek vezethetők le. Amint az előző alfejezetekben bemutattam, a demográfiai folyamatokat számtalan mutatószámmal, illetve matematikai eszközzel jellemezhetjük. Természetesen ezek egymástól nem függetlenek. A pillanatnyi népességszám csak az egyik jellemzője. Ez hosszú, akár évszázados folyamatok hatásainak lenyomata. A két generációval korábbi egyéni és társadalmi döntések határozzák meg a jelenleg népességi jellegzetességeit: az adott területi jellemzőket, a népsűrűséget, a kormegoszlást és a nemi arányokat. Ezek a számok képezik a jövőre vonatkozó népességbecslések alapjait is. [11]

Malthus- és Verhulst-modellek

A népesedésre vonatkozó biológiai elmélete szerint a népesedést szükségszerűen korlátozza az élelmiszer. A népesség mindig növekszik, ahol bőséges az élelmiszer, hacsak nem gátolja valami igen hatalmas és szembeszökő akadály. Megállapítása szerint a népesség, ha nincs gátolva, mértani haladvány szerint szaporodik, ugyanakkor az élelmiszerek előállítása csak számtani haladvány szerint növekedhet.

A népesség mértani sorozat szerinti növekedése a (4) egyenletből is megkapható, ha a nyers születési és halálozási arányszám időben lassan változik, tulajdonképpen állandónak tekinthető. E két mutatószám különbsége adja az úgy nevezett változási arányt (r); (7) egyenlet: [7, 12]

$$r = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = CBR - CDR = \frac{B_t - D_t}{N_t} \qquad (7)$$

Ha a népesség számának valamilyen kezdeti, hipotetikus időpontban N0-nak vesszük, akkor a t-edik időpontban a népesség számát a mértani haladvány szerint a következő (8) egyenlet adja. [12]

$$N_t = N_0(1+r)^t \qquad (8)$$

Ezt az összefüggést használja a KSH is az átlagos évenkénti szaporodás, illetve fogyás számítására, azaz változási arány becslésére; (9) egyenlet. [13]

[7] Kapitány Balázs (Szerk.)(2015): *Demográfiai fogalomtár.* Budapest: KSH Népességtudományi Kutatóintézet. 2015 www.demografia.hu/tudastar/fogalomtar

11] Andersen, Paul: Bozeman Science; *Human Population Dynamics.* https://www.youtube.com/watch?v=DqKg5rWLpEo (Közzététel: 2015. okt. 5.)

[12] Donovan, T. M.–Welden, Ch. W. (2002): *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution.* Sunderland, Massachusetts USA: Sinauer Associated, Inc.

[13] KSH: Népszámlálás 2011 – Módszertani megjegyzések, fogalmak. www.ksh.hu/nepszamlalas/docs/modszertan.pdf

$$r = \sqrt[t]{\frac{N_t}{N_0}} - 1 \qquad (9)$$

A fenti egyenletek a Malthus-modell diszkrét alakját adják, amelyet a szakirodalomban geometriai vagy mértani növekedési modellnek is neveznek. [12]

Ha a népesség számának alakulását folytonos és egyszeresen differenciálható függvényként kezeljük, akkor az (5) egyenletet úgy írható fel, hogy a népességszámváltozás sebességének, (népességfüggvény idő szerinti első deriváltjának) és a népesség hányadosának az értéke egy állandó lesz. Ennek alapján Malthus elképzelése úgy is megfogalmazható, hogy a populáció nagyságának megváltozása arányos annak pillanatnyi nagyságával. Matematikai formában ezt a (10) egyenlettel megadott közönséges elsőrendű differenciálegyenlet fejezi ki:

$$\frac{dN}{dt} = \rho \cdot N(t) \qquad (10)$$

A differenciálegyenlet kezdeti feltétele pedig megadja, hogy a megfigyelés kezdeti (nulladik) időpontjában mennyi volt a populáció létszáma; $N(t = 0) = N_0$.
A differenciálegyenlet megoldása exponenciális növekedést ad; (11) egyenlet:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{p \cdot t} \qquad (11)$$

A (10) és (11) egyenletek a Malthus-modell folytonos alakját adják, amelyet a szakirodalomban exponenciális növekedési modellnek nevezik. [12, 2]

A népesség és az erőforrások kapcsolatának ezen klasszikussá vált modellje szerint az erőforrások határozzák meg a népesedést. Mivel az elsődleges erőforrás az élelmiszer, a népesség száma a rendelkezésre álló élelem mennyisége által megengedett mértékig növekszik.

Pierre-François Verhulst (1804–1849) belga matematikus 1838-ban tovább fejlesztette Malthus modelljét, amely lehetővé teszi, hogy figyelembe vegyük a populáció egyedei közötti erőforrásokért folytatott belső versenyt. A növekedés zárt környezetben, korlátozott erőforrások mellett folyik, amely visszahat a növekedésre és akadályozza azt. Az adott rendszer tehát jól jellemezhető a környezet eltartóképességével. [12]

[2] Polónyi István (2002): *Oktatás gazdaságtana.* Budapest: Osiris. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/oktatas-gazdasagtana/adatok.html

[12] Donovan, T. M.–Welden, Ch. W. (2002): *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution.* Sunderland, Massachusetts USA: Sinauer Associated, Inc.

Ezt a szakirodalomban logisztikus modellnek is nevezik. Ez a modell a Malthius-modelljéből is származtatható olyan módon, hogy a születési ráta csökkenő módon, és a halálozási ráta növekvő módon arányos a népesség számával, (12.a) és (12.b) egyenlet:

$$CBR = b_0 + b_1 \cdot N_t \qquad (12.a)$$

$$CDR = d_0 - d_1 \cdot N_t \qquad (12.b)$$

A fenti egyenleteket a (6) egyenletbe helyettesítve a változási arány következőképpen számolható; (13) egyenlet:

$$r(N) = b(N) - d(N) = b_0 - d_0 - (b_1 - d_1) \cdot N = (b_0 - d_0) \cdot \left(1 - \frac{b_1 - d_1}{b_0 - d_0} \cdot N_t\right) \qquad (13)$$

Amikor a változási arány nullává válik, azaz a növekedési és a halálozási ráta egyenlőségéből adódik a környezet eltartóképessége; (14) egyenlet:

$$r(N) = 0 \rightarrow b(N) = d(N) \rightarrow K = \frac{b_0 - d_0}{b_1 - d_1} \qquad (14)$$

A fenti egyenletből adódik a Verhulst-modell diszkrét alakja; (15) egyenlet: [12]

$$\frac{\Delta N_t}{N_t} = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \qquad (15)$$

A Verhulst-modell folytonos alakját pedig az alábbi differenciálegyenlettel lehet felírni; (16) egyenlettel:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad (16)$$

A fenti differenciálegyenlet a megoldását a szokásos kezdeti feltételek mellett az alábbi logisztikus függvényt adja; (17) egyenlet: [12]

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-\rho_0 \cdot t}} \qquad (17)$$

[12] Donovan, T. M.– Welden, Ch. W. (2002): *Spreadsheet Exercises in Ecology and Evolution.* Sunderland, Massachusetts USA: Sinauer Associated, Inc.

Kohorsz-komponens módszer; Leslie-modell

Ez a módszer kor szerinti arányszámokkal, valószínűségekkel dolgozik. A születésszámot a nők életkora szerinti általános korspecifikus termékenységi arányszámok és a női népességszámok szorzatösszegeként állítjuk elő. A halálozások kor szerinti számát pedig az általános korspecifikus elhalálozási valószínűségek és a kor szerinti népességszámok szorzataiból becsüljük. (Általában az arányszámokat, valószínűségeket egy adott év ismert adataiból számítják, feltételezve, hogy ez lesz érvényben a következő időszakban is.)

A kohorsz-komponens módszer egyik matematikai interpretációja az úgynevezett Leslie-modell. Ez a női populáció korcsoportokra osztható részét vizsgálja, és ennek az időbeli változását számítja ki.

A *t+1*-edik időpontban megszületett női egyedek száma kiszámítható *t* időpontban női korosztályok egyedszámának és a lányszülés korspecifikus termékenységi arányszámának szorzatösszegéből (értelemszerűen a nem termékeny korcsoporthoz tartozó ASFR-mutató nulla), (18.a) egyenlet: [14].

$$N_1(t+\Delta t) = ASFR_1^F(t)\cdot N_1(t) + ... + ASFR_i^F(t)\cdot N_i(t) + ... + ASFR_i^F(t)\cdot N_i(t) \quad (18.a)$$

A $t+\Delta t$ időpontban az $i+1$ kohorsz egyedszáma a t-edik időpontban i-edik kohorsz egyed egyedszámának és a kohorsz túlélési valószínűségének szorzatából számolható; (18.b)

$$N_i(t+1) = p_i \cdot N_i(t) \qquad i=2....n\text{-}1 \qquad (18.b)$$

Ha a népességet n korcsoportra osztjuk, akkor egy n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk, amely mátrix alakban a következőképpen néz ki; (19) egyenlet:

$$\mathbf{n}(t+\Delta t) = \mathbf{L}(t)\cdot \mathbf{n}(t) \qquad (19)$$

Bizonyítható, hogy az Leslie-mátrixnak (**L**) mindig van egy olyan pozitív sajátértéke, amelyet a szakirodalomban domináns sajátértéknek (λD) neveznek, és azt fejezi, ki, hogy az népességszám egy generációnyi idő alatt λD-szorosára változik.

[14] Jensen, A. L. (1995): Simple density-dependent matrix model for population projection. *Ecological Modelling.* 77. Pp. 43–48.

A Leslie-mátrix egy speciális alakú mátrix, ezért karakterisztikus polinomjának az együtthatói viszonylag könnyen meghatározhatók. A legmagasabb kitevőjű tagjának az együtthatója egy (a_n=1), a többi tag együtthatója a (20) egyenlettel megadott rekurzív képlettel kiszámítható:

$$a_{n-k} = ASFR_k^F(t) \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i(t) \qquad k=1....n \qquad (20)$$

A karakterisztikus polinomot pedig a (21) egyenlet adja:

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} ..... - a_{n-k} \cdot \lambda^{n-k} - ..... - a_1 \cdot \lambda - a_0 \qquad (21)$$

A modell további jellemzője, hogy ha paramétereket időben állandónak vesszük, és valamely *t* időpontban indítjuk a számítást, akkor $t_0+k\cdot\Delta t$ időpontban közvetlenül is megkapható a népesség-korcsoport megoszlása; (22) egyenlet

$$\mathbf{n}(t + k \cdot \Delta t) = \mathbf{L}^k \cdot \mathbf{n}(t) \qquad (22)$$

Tulajdonképpen a (22) egyenlet nem más, mint egy mátrixalakban felírt mértani sorozat, és teljesen analóg a (7) egyenlettel. A Malthus-modellel való rokonsága akkor válik még nyilvánvalóbbá, ha a (19) egyenletet következőképpen alakítjuk át:

$$\mathbf{n}(t + \Delta t) = \mathbf{n}(t) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(t) - \mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(t) + (\mathbf{L}(t) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}(t) \qquad (23)$$

Az (23) egyenlet az (8) egyenlet mátrixos alakja. Ennek alapján a Leslie-mátrix és egységmátrix különbsége (**L-I**) megfelel az r változási aránynak. Nagyon nagy t esetén a Leslie-mártix domináns sajátértékének (λ_D) *t*-edik hatványa arányos azzal a népességszámmal, amelyet az exponenciális növekedés ad; (24) egyenlet:

$$N(t) \approx \lambda_D^t = e^{\rho \cdot t} \qquad (24)$$

A Leslie-modellnek az exponenciális növekedéssel való kapcsolata miatt csak korlátozottan használható a népességi folyamatok elemzésére és előrejelzésére. Leginkább csak rövidtávú, néhány lépéses iterációnál ad pontos becslést. Ezt a tényt a modell megalkotója is belátta úgy módosított modelljét, hogy alkalmas legyen a környezet eltartóképességének kezelésére. Ezt azóta több kutató többféleképpen is módosította. Az egyik lehetőség például, ha az (23) egyenletet átalakíthatjuk úgy, hogy a növekedésért felelős (**L-I**) mátrixot beszorozzuk egy **D**(**N**(t)-vel jelölt úgynevezett sűrűségfüggő mátrixszal;

(25) egyenlet:

$$\mathbf{n}(t+\Delta t)=\mathbf{n}(t)+\mathbf{D}(\mathbf{n}(t))\cdot(\mathbf{L}(t)-\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}(t) \qquad (25)$$

Célok, módszer

Magyarországra is jellemző az az európai trend, hogy a nők későbbi életkorra halasztják a gyermekvállalást. A korspecifikus termékenységi arányszámot (ASFR) grafikusan ábrázolva megkapjuk az úgynevezett korspecifikus termékenységi görbét. 1990-ben a gyermekvállalási kor viszonylag homogén volt a női népesség körében, hiszen döntő többségüknek 21 és 25 éves korukban született gyermekük.

Célom volt, hogy megfelelő modellt találjak és ezáltal én is saját számítást tudjak végezni a népesség és a korcsoportok számának becslésére. A választásom egy az ökológiában gyakran használt modellre esett, amelyet Patrick Holt Leslie (1900–1974) dolgozott ki 1945-ben. A további szakirodalmi kutatások arra irányultak, hogy ezt a modellt a valóságnak megfelelő paraméterekkel töltsem fel, azaz megtaláljam a bemenő adatok szempontjából leghitelesebb forrásokat.

A Leslie-modell egyik hátránya, hogy időben nem változó termékenységi és halandósági paraméterek esetén az exponenciális növekedést adó Malthus-modellhez tart. Ezért valamilyen tudományosan megalapozott féket kellett a rendszerben tenni. Ezt a Verhulst-modell szolgáltatta, ennek a környezeti eltartóképességet kellett beépíteni a modellbe. Ezt önkényesen Leslie–Verhulst-modellnek neveztem. Így is tisztelegve a két kutató munkássága előtt.

Vizsgálatok, téma kifejtése

A korcsoportok becslését először módosított Leslie-modellel számoltam. Az eredeti modell csak a női népességgel számol. A nemi arányt 50%-osnak veszi, és becslésből adódó számokat meg kell szorozni, hogy megkapjuk a korcsoportokra vonatkozó népesség számot. A KSH adatai alapján, Magyarországon születéskor 100 nőre körülbelül 106 férfi jut.

Továbbá az is igaz, hogy a férfiak és nők halandósága eltér.

A Leslie-modellt úgy módosítottam, hogy ezeket a tényeket is figyelembe veszi. Ennek alapján módosulnak az (18.a) és (18.b) egyenletek további egyenletekkel egészülnek ki, amelyek az anyák által szült fiúgyermekek számával számolnak; (24.a) egyenlet.

$$N_1^M(t+\Delta t) = ASFR_1^M(t)\cdot N_1^F(t) + ... + ASFR_i^M(t)\cdot N_i^F(t) + ... + ASFR_n^M(t)\cdot N_n^F(t) \quad (26.a)$$

A fenti egyenlet vektor-mátrixos alakját a (21.b) egyenlet adja:

$$\begin{bmatrix} N_1^M(t+\Delta t) \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^M(t) & f_2^M(t) & . & . & f_i^M(t) & . & . & f_n^M(t) \\ 0 & 0 & & . & . & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & . & . & . & . & \\ . & 0 & . & . & . & . & . & \\ . & & & . & . & . & . & \\ . & & & & 0 & . & . & \\ . & & & & & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^F(t) \\ N_2^F(t) \\ . \\ . \\ N_i^F(t) \\ N_{i+1}^F(t) \\ . \\ N_i^F(t) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^M(t)\cdot\mathbf{n}^F(t)$$

(26.b)

A férfi népességre is igaz, hogy *t+Δt* időpontban az *i+1* kohorsz egyedszáma a *t*-edik időpontban *i*-edik kohorsz egyed egyedszámának és a kohorsz túlélési valószínűségének szorzatából számolható; (27.a) egyenlet:

$$N_{i+1}^M(t+1) = p_i^M \cdot N_i(t) \qquad i=2....n-1 \quad (27.a)$$

A (27.a) egyenlet mátrixos alakját a (27.b) egyenlet adja:

$$\begin{bmatrix} N_1^M(t+\Delta t) \\ N_2^M(t+\Delta t) \\ . \\ . \\ N_i^M(t+\Delta t) \\ N_{i+1}^M(t+\Delta t) \\ . \\ N_n^M(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ p_1^M(t) & 0 & & . & . & & 0 & 0 \\ 0 & p_2^M(t) & & . & . & & . & . \\ . & 0 & . & . & . & & . & . \\ . & & & . & . & & . & . \\ . & & & & p_1^M(t) & & . & . \\ . & & & & & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & p_{n-1}^M(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1^F(t) \\ N_2^F(t) \\ . \\ . \\ N_i^F(t) \\ N_{i+1}^F(t) \\ . \\ N_n^F(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L}^M(t)\cdot\mathbf{n}^M(t)$$

(27.b)

A (26.b) és (27.b) egyenletek összeadásával határozható meg a férfi népesség korcsoportonként száma; (28) egyenlet:

$$\mathbf{n}^{M}(t+\Delta t)=\mathbf{F}^{M}(t)\cdot\mathbf{n}^{F}(t)+\mathbf{L}^{M}(t)\cdot\mathbf{n}^{M}(t) \qquad (28)$$

A számításokhoz a női népességre felírt vonatkozó (19) mátrix egyenlettel Leslie-modellje nem módosult. A férfi népesség Leslie-modelljének mátrixos alakját a (28) egyenlettel adja.

A számításhoz felhasznált fiú és lányszületésekre vonatkozó korspecifikus specifkus termékenységi arányszámot a [15] adataiból számoltam 5 évre vonatkoztatva.

1 táblázat. A módosított Leslie-modell számításához felhasznált fiú és lány ASFR-mutatók.

Anyai korosztály sorszáma; (i)	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Anyai korév intervalluma	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-
$ASFR^{M}$	0,046192	0,100402	0,179716	0,196434	0,095458	0,018418	0,000581	0,046192
$ASFR^{F}$	0,043577	0,094719	0,169544	0,185315	0,090055	0,017375	0,000548	0,043577

[15] adatai alapján saját számítás

A modell csak rövidtávú becslésre alkalmas, mert utána drasztikusan görbe. A további számításokhoz a sűrűségfüggő Leslie-modellt használtam. A női népességre vonatkozóan az (25) egyenletet használtam. A férfi népességre vonatkozóan a (28) egyenletet szintén sűrűségfüggővé alakítottam át; (29) egyenlet:

$$\mathbf{n}^{M}(t+\Delta t)=\mathbf{n}^{M}(t)+\mathbf{F}^{M}(t)\cdot\mathbf{n}^{F}(t)+\mathbf{D}(\mathbf{n}(t))\cdot(\mathbf{L}^{M}(t)-\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}^{M}(t) \qquad (29)$$

A sűrűségfüggő mátrix $\mathbf{D}(\mathbf{N}(t)$ kiszámításánál a K környezeti korlátot szétosztottam a korcsoportok között. Azt tételezetem fel, hogy a népességszám a környezeti korlát közelében egyensúlyi állapotba kerül. Ekkor az úgynevezett harang alakú korfa alakul ki.

[15] Magyar statisztikai évkönyv 2012. Budapest: KSH.

A Leslie–Velhurst-modellből számolt aszimptotikus népességszám ehhez fog tartani. Ez alapján a sűrűségfüggő mátrix főátlójában lévő elemeket a következőképpen számoltam ki, módosítva a (30) egyenletet:

$$q_i(N_i(t)) = 1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \qquad (30)$$

A szakirodalmak [15; 16] alapján egyensúlyi korfához tartozó becsült férfi és női kormegoszlással számoltam.

Eredmények

Először az előző fejezetben ismertetett modelleket illesztettem az 1980–2016-os népességadatokra. A Malthus-modell exponenciális függvényét a (31) egyenlet adja:

$$N(t) = 10709 \cdot e^{-0,023(t-1980)} \qquad (31)$$

A modell változási aránya ρ=-0,023-nak számoltam és a regressziós illesztés pontosságát jellemző determinációs együttható R^2=0,9874-nak adódik. Ennek alapján azt lehet mondani, hogy az exponenciális illesztés középtávú előrejelzésre alkalmas. Mint ahogy azt 1. fejezetben ismertettem a modell hátránya, hogy nincs korlátja, azaz növekedése, illetve csökkenése végtelenbe tart. Arra viszont megfelelő, hogy a további modellek paramétereihez jó kiindulási alapot adjon.

Az adatsorra illesztett Velthurst-modellből származó logisztikus függvényt a (32) egyenletben mutatom be:

$$N(t) = \frac{62\,158}{1 + 0,01993 \cdot e^{-0,0199t}} \qquad (32)$$

A modellből a változási arányt ρ=-0,0199-nek és a környezet eltartóképességét K=65 158 ezer főnek számoltam, és determinációs együttható R^2=0,9882-nak adódik.

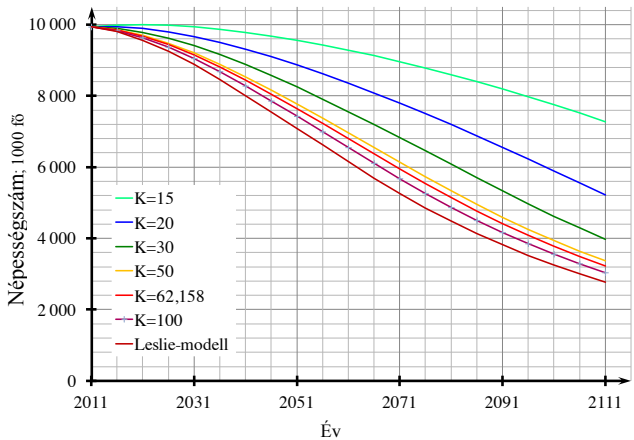
A fenti modellek jól írják le a népesség összlétszámának és annak középtávú becslésére is alkalmasak, viszont az egyes korcsoportok népesség számának becslésére jellegüknél fogva nem képesek.

[15] Magyar statisztikai évkönyv 2012. Budapest: KSH.

[16] Hobbs, Frank: Age and Sex Composition. In: Siegel, J. S.–Swanson, D. A. (Eds.): *The Methods and Materials of Demography*. Second edition. San Diego: Elsevier Academic Press. Chapter 7. Pp. 125–173.

A *1. ábra* azt mutatja, hogy viszonyul egymáshoz a Leslie-modell és a Leslie–Verhulst-modell különböző környezeti eltartóképességre (15; 20; 30; 50; 62,158 és 100 millió) fő esetén. Ebből az ábrából is jól látszik, hogy a Leslie-modell az exponenciális növekedéssel rokon, amelynél végtelen a környezet eltartóképessége.

1. ábra. A módosított Leslie- és különböző környezeti eltartóképességű Leslie–Velhurst-modellek összehasonlítása.

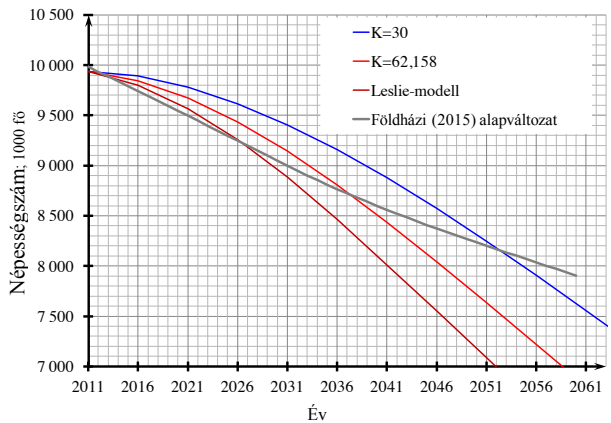


Eredmények értékelése, következtetések

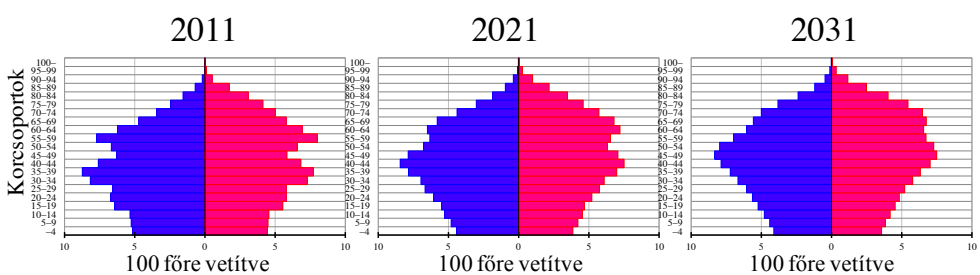
Az *1. ábrán* különböző Leslie-modell és Leslie–Verhulst-modell két környezet-eltartóképességi hipotézissel készült számításokat hasonlítom össze Földházi (2015) adataival. Ezek alapján az mondható, hogy a Leslie-modellel történt becslésem körülbelül 2027-ig megegyezik a szakirodalmi becsléssel. Onnantól pedig a csökkenő környezeti eltartóképességi modellek egyeznek meg a szakirodalmi adatokkal. A Leslie–Verhulst-modell körülbelül 30 éves időtávra eredményesen használható. Ami viszont szembetűnő, hogy szakirodalom görbéje alulról domború (konkáv), a számításaim eredményeként kapott görbék pedig alulról homorúak (konvex). Az előbbinél a folyamat gyorsan indul (meredekebb a görbe) és azután lassul le, az utóbbi pont fordítva viselkedik. Ennek egyik oka, hogy lehet, hogy a szakirodalmi és az általam használt paraméterek és adatok hasonlóak, de kicsit más megközelítésben kezelik a folyamatot. A szakirodalmi

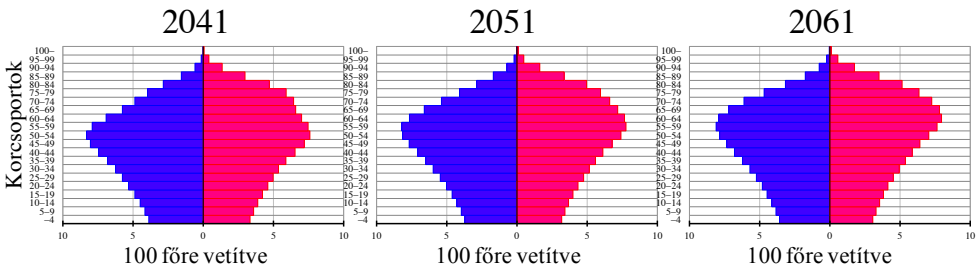
modell egy exponenciálisan lecsengő függvényt ad viszonylag gyors lefutási idővel (100 éves). A Leslie- és még inkább Leslie–Verhulst-modellből adódó függvénynek az inflexiós pontja körülbelül 200–500 év, ezután lesz csak konkáv a függvény. Ez a modellek sajátsága, a matematikában ezeket szigmoid függvénycsaládnak nevezik.

2. ábra. A saját számításaim és a szakirodalmi adatok összehasonlítása.



3. ábra. A Leslie-Velhurst K=30 modell által előrejelzett korfák; 2011-2061.





Forrás: Saját számítás és szerkesztés

A továbbiakban 30 milliós környezeti eltartóképességű (K=30) modellből adódó eredményeket ismertetem. A *3. ábrá*ban modell által számolt korfákat mutatom be.

A modellből adódó korfák visszaadják azt a szomorú tényt, hogy változatlan termékenységi és halandósági viszonyok mellett Magyarország népessége egy elöregedő és fogyó trendet fog követni. A népesség-korcsoportok számának időbeli lefolyását pedig a *2. ábrá*ban mutatom be. A szakirodalmi közölt és a saját becslésem csak a 70-en túli népesség számában mutat különbséget. A szakirodalom szerint ez egy folyamatos növekvő korcsoport, amíg a saját számításaim szerint 1,6 millió főnél stagnálni fog. Az eltérés a két modell adottságaiból erednek. A Leslie–Verhulst- K=30 modellben ez az 1,6 milliós szám az erre a korcsoportra bontott környezeti eltartóképesség, ezért nem lépi át ezt a számot, illetve a modell csak aszimptotikusan közelíti ezt a számot.

Összefoglalás

A számítási modellek hasonlóan írják le a népesség rövid- és középtávra vonatkozó népességszámot, illetve a nem- és koreloszlást. A számításokat azonos korspecifikus termékenységi mutatóval és halandósági viszonyokkal. Természetesen a megfelelő, ha mindkét bemenő paraméternél vannak pontosabb, illetve flow-jellegű adatok (például becslőfüggvény, amely leírja ezek évenkénti változását), akkor az adatok pontosíthatók.

A számításokkal a következő eredményeket kaptam: A szakirodalmi adatokkal összhangban Magyarország népessége egy elöregedő és fogyó trendet fog jelezni a következő évtizedekre, ami jelentős kihatással lesz az iskoláztatásra, a munkaerőpiacra, és nyugdíjrendszerre is.

Összességében ez a tény a szakképzett munkaerő iránti munkaerő-piaci kínálat jövőbeni alakulásával kapcsolatos gazdasági stratégiák felülvizsgálatát is igényli.

Köszönetnyilvánítás
Itt ragadom meg az alkalmat, hogy köszönetet mondjak mindazoknak, akik segítségükkel hozzájárultak dolgozatom elkészítéséhez.
Őszinte tisztelettel köszönöm meg Pergel Dóra kolléganőmnek a tanulmány készítése során tett számtalan hasznos észrevételét és nem utolsósorban végtelen türelmét.

ÁRVAI-HOMOLYA SZILVIA *–KÖREI ATTILA **–LENGYELNÉ SZILÁGYI SZILVIA ***

Élménypedagógiai játékok konstruálása

Összefoglalás: Ez év nyarán a Miskolci Egyetemen kísérleti jelleggel olyan matematikai felkészítő nyári táborban vehettek részt a műszaki, illetve informatikai képzési területre felvételt nyert fiatalok, ahol lehetőségük nyílt az egyetemi tanulmányaikhoz releváns matematikai alapok felfrissítésére, az esetleges hiányosságok feltárására, valamint ezek azonnali pótlására.
A kötetlen légkörű matematikai készségfejlesztő foglalkozások során korszerű oktatási módszerek alkalmazását teszteljük. Az elméleti anyag mélyebb beépülésének érdekében inkluzív didaktikai alapokon nyugvó élménypedagógiai játékokat fejlesztettünk a hétnapos nyári tábor délutáni foglalkozásaihoz. Cikkünkben a nemformális pedagógia szellemében kidolgozott matematikai fejlesztőjátékaink egyikét mutatjuk be, amelyeket célzottan 4–8 fős csoportokkal történő hatékony készségfejlesztés céljából hoztunk létre.
Kulcsszavak: Élménypedagógiai játék; inkluzív didaktika; matematikai készségfejlesztés.

Abstract: In the University of Miskolc a summer mathematical camp is organized on an experimental basis for the admitted students in engineering and information science. The summer camp provides an opportunity for refreshing the students' mathematical knowledge, for exploring of potential deficiencies and for replacing them immediately. We test up-to-date pedagogical methods in the course of occupations where the mathematics skills are developed in an informal atmosphere. In order to engrave the theoretical knowledge we elaborated experiential education games based on inclusive didactics for the afternoon sessions of the summer camp. In this paper we present one of our mathematical developing games which is created in the spirit of non-formal pedagogy and definitely suitable for efficient skill development in groups with 4–8 members.

* *Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet*
E-mail: mathszil@uni-miskolc.hu

** *Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet*
E-mail: matka@uni-miskolc.hu

** *Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet*
E-mail: matszisz@uni-miskolc.hu

1] *Nyilatkozat a minőségi felsőoktatásért* 2018. június 27. [Online]. Elérhetőség: https://tka.hu/hir/10126/nyilatkozat-a-minosegi-felsooktatasert

[2] Nikitscher Péter (2016): *Milyen a jó pedagógus? – elvárások, szerepek, kompetenciák az empirikus kutatások tükrében.* https://ofi.hu/publikacio/milyen-jo-pedagogus-elvarasok-szerepek-kompetenciak-az-empirikus-kutatasok-tukreben#main

[3] Bárdossy Ildikó–Dudás Margit–Pethőné Nagy Csilla– Priskinné Rizner Erika (2003): *Kooperatív pedagógiai stratégiák az iskolában.* Pécs: Pécsi Tudományegyetem BTK Tanárképző Intézet.

[4] Kagan, S. (2004): *Kooperatív tanulás.* Budapest: Ökonet.

[5] Arató Ferenc–Varga Aranka (2008): *Együtt-tanulók kézikönyve - Bevezetés a kooperatív tanulásszervezés rejtelmeibe.*Budapest: Educatio Társ. Szolg. Kht.

[6] Orbán Józsefné (2009): *A kooperatív tanulás: szervezés és alkalmazás*. Pécs: Orbán&Orbán Bt.

Keywords: Experiential education game, inclusive didactics, mathematics skill development.

Bevezető

A felsőoktatás reformjának következtében egyre hangsúlyosabb szerep jut a hallgatóközpontú oktatáshoz kapcsolódó tanulási stratégiáknak és módszereknek. A korszerű tanulási és tanítási folyamatban előtérbe került a hallgatók aktív szerepvállalásának fontossága a saját tanulási folyamatuk megtervezésében és kivitelezésében, tehát nemcsak az oktató, hanem a hallgató is aktív résztvevőként jelenik meg [1]. Megváltoztak az oktatói munkával kapcsolatos elvárások is, a tudásátadó szerep prioritása átértékelődött; segítségnyújtó, támogató, azaz mentori feladatokkal bővült a feladatkör. A haladó szellemiségű oktató kreatív, reflektáló, együttműködő, proaktív, ugyanakkor értékkövető. Fel tudja mérni a hallgatók képességeit és azt is, hogy milyen előzetes ismeretekkel rendelkeznek. Mindezek figyelembevételével alakítja ki az oktatáshoz a lehető legjobb módszert [2]. Számos publikáció emeli ki a kooperatív pedagógia tanítási-tanulási stratégiáinak sikerességét [3–6]. Bizonyított, hogy a közös gondolkodás és a csapatmunka segítségével fejlődik a csoportkohézió, amely jelentősen támogatja a tanulási folyamatok eredményességét megfelelő tanulási környezetben. Az innovatív módszereknek az oktatási folyamatba történő integrálása nyilvánvalóan azt célozza, hogy a hallgatók motivációs szintje emelkedjen, a tanulási folyamatban való részvétel pedig sikeressé váljon. A hallgatóközpontú gyakorlati órák során, az eredményes tanulás érdekében, a tanulók nagyobb felelősséggel tartoznak saját maguknak is, vagyis nem lehetnek csupán passzív befogadók.

A felsőoktatási képzések fontos faktora a gyakorlatban jól alkalmazható tudás, amelyet a hallgató már a képzése folyamán elsajátít. A kimeneti kompetenciákra történő fókuszálás a műszaki-informatikai képzési területen is igényként jelentkezett, azonban a felsőoktatásba kerülő fiatalok jelentős része a középiskolában felhalmozott hiányosságai miatt hátránnyal indul már a tanulmányok megkezdésekor. Az oktatóknak tehát arra is megoldást kell találniuk, hogy a lemorzsolódást megelőzzék.

A félévközi felzárkóztatási kísérletek nem bizonyultak hatékonynak [7, 8], azonban a felvételt nyert hallgatók intenzív, nyári tábor keretei között történő készségfejlesztését a korábbi tapasztalatok alapján reménytelinek látjuk. A tematikus tábor matematikai készségfejlesztő foglalkozásaihoz olyan élménypedagógiai játékokat dolgoztunk ki, amelyek alkalmasak egy-egy releváns témakör esetén a hiányosságok feltérképezésére, valamint hathatós eszközei lehetnek az ismeretek átadásának, megvalósítva ezáltal a saját ütemben történő tanulás folyamatát. Cikkünkben a logaritmus fogalmához kapcsolódó játékunkat mutatjuk be.

A mumus logaritmus

A logaritmus szükségességét a 16–17. században kezdték felismerni a matematikusok. A legfőbb cél ekkor az volt, hogy ne kelljen nagy számokat összeszorozni és osztani egymással, ehelyett összeadásokat és kivonásokat tartalmazó képletekre törekedtek. Az alapgondolat azonban már az ókorban megjelent a számtani és mértani sorozatok valamilyen módon való egymáshoz rendelésének kapcsán [9].

A logaritmus fogalmával általában a 11. évfolyamon találkoznak a középiskolások. A Nemzeti Alaptanterv két helyen említi a logaritmust. Először a gondolkodás fejlesztése témakörön belül találkozhatunk vele, *Az aritmetikai műveletek újraértelmezése, kiterjesztése, új műveletek értelmezése (hatvány, gyök, logaritmus) témánál. Említést nyer továbbá az* Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben *és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, terület-, felszín-, térfogatszámítás, relatív gyakoriság, valószínűség, logaritmus függvény)* témakör esetén is, amelyet számos fejlesztési területhez lehet hozzákapcsolni.

Gondolhatunk itt például a térben és időben való tájékozódáshoz, tekintettel arra, hogy az exponenciális és logaritmus folyamatok az életben is előfordulnak, valamint a megismeréshez, a problémamegoldáshoz, és az ismeretek rendszerezéséhez nélkülözhetetlen.

Számos gyakorlati példán keresztül szemléltethető a fogalom, például a radioaktív izotópok bomlásával kapcsolatos számításokkal, kormeghatáro-

[7] Kollár Judit (2018): *Tanulássegítő tréningek?!* In: Dobjánné–Antal Elvira–Nagy Péter (Szerk.): Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 42. Országos Konferenciája MAFIOK 2018: Konferencia absztraktok, Kecskemét: Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar.

[8] Bakonyvári Dávid–Bodnár Gabriella–Szilágyi Brigitta (2017): ZERO2HERO – Az alternatív felzárkóztatás. *Opus et Educatio*. Vol 4. No 3. Pp. 250–275.

[9] Sain Márton (1978): *Matematikatörténeti ABC*. Budapest: Tankönyvkiadó.

zással, a légnyomás változásának leírásával, a fény folyadékban terjedésével, a baktériumok szaporodásával, tavirózsás feladatokkal, gazdasági példákkal és még hosszan sorolhatnánk.

A kerettantervben a logaritmus függvény a 11. évfolyam tananyagában szerepel a *Számtan, algebra*, illetve a *Függvények, sorozatok* témakörön belül. A logaritmus tanítása, a fogalom bevezetése előkészületeket igényel. A hatványozás alapfogalmaival, a hatvány- és gyökfüggvények tulajdonságaival, a törtkitevőjű és irracionális kitevőjű hatványokkal kapcsolatos ismeretek elengedhetetlenül szükségesek, így feleleventésük nélkülözhetetlen. Az exponenciális függvény tárgyalása, valamint az exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek témakör feladatainak megoldása előzi meg általában a logaritmus fogalmának bevezetését. Többféle megközelítéssel építhető fel a kitevő keresésének értelmezése. A logaritmusfüggvényt és az azonosságokat, valamint a logaritmusos egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket ezt követően tartalmazza a tananyag.

Tapasztalataink szerint alapvető probléma, hogy a definíció nem rögzül, nem válik készséggé. Ezt a számológép, valamint a függvénytáblázat használata is visszaveti. Gondoljunk az alábbi, középszintű érettségin is előforduló feladatokra:

– Melyik a nagyobb: $A = \sin\frac{7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2\frac{1}{4}$? (2007. október 25.)

– Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! (2009. május 5.)

– Melyik a nagyobb: $A = \lg\frac{1}{10}$ vagy $B = \cos 8\pi$? (2011. május 3.)

Ezek a példák számológép használatával lényegében gondolkodás nélkül megoldhatók, a definíció ismerete nem szükséges, a számológép funkcióival kell csupán tisztában lenni. Az alábbi, 2011. október 18-ai középszintű érettségi vizsga egyik példájának megoldásához viszont még számológépre sincs szükség:

– István az $x \to \log_{\frac{1}{2}} x \ \ (x > 0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).

Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

A) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
B) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
C) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.

1. ábra. A 2011. október 18-ai középszintű érettségi vizsga 10. feladatának mellékelt ábrája.

Az azonosságok használatát ellenőrző feladatok esetén is találkozunk meglepően egyszerű kérdéssel, amelyre a válasz a függvénytáblázatból rögtön megadható:

– Mekkora x értéke, ha $\lg x = \lg 3 + \lg 25$? (2006. február 21.)

Természetesen összetettebb, gondolkodást igénylő feladatok is előfordultak a logaritmus függvénnyel kapcsolatban az érettségi vizsgákon, azonban a statisztikák szerint ezek száma meglehetősen alacsony [10].

A 18/2016. EMMI-rendeletben megfogalmazott képzési és kimeneti követelményekkel összhangban a Miskolci Egyetem valamennyi műszaki és informatikai alapképzési szakán a kötelezően teljesítendő tárgyak között szerepel – általában két féléven keresztül – analízis témakörű kurzus.

Az analízis tárgyak sikeres teljesítéséhez elengedhetetlenül szükségesek a középiskolában szerzett biztos matematikai alapok. Ezek hiányában a hallgatók lényegesen nehezebben tudják megoldani a zárthelyi dolgozatokban, illetve a vizsgadolgozatokban kitűzött feladatokat. A logaritmus fogalmának ismerete és magabiztos kezelése valamennyi matematikai kurzus esetén alapvető, ezért célszerűnek láttuk ennek a témakörnek a játékosítását.

[10] Árvai-Homolya, Szilvia–Lengyelné Szilágyi Szilvia (2017): Matematika emelt szintű érettségi vizsgák elemzése az informatikai és műszaki alapképzési szakokon elvárt matematikai tudásanyag szempontjából. In: Talata István (Szerk.): Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája MAFIOK 2017. Budapest: Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar. Pp. 79–87.

Kártyajátékok az oktatásban

A játékok alkalmazásának fontossága elvitathatatlan az oktatásban, különös tekintettel arra, hogy általa a kevésbé jó képességű tanulók is sikerélményhez juthatnak, észrevétlenül sajátíthatják el azokat az ismereteket, amelyekkel a hagyományos frontális oktatás során gondjuk akadt. Természetesen a játékos tanulás a jó tanulók számára is lényeges, hiszen – többek között – fejleszti a logikus gondolkodást, a stratégiai szemléletet, a problémamegoldó készséget. Ezt a véleményt erősíti meg Johan Huizinga holland filozófus elmélete, aki az egész emberi társadalom fejlődését, a kultúra és a tudomány eredményeit a homo ludens (a játszó ember, a játékos ember) természetére vezeti vissza. Azt a ma divatos irányzatot, mely során az egész oktatási tevékenységet játékos keretbe ágyazzák, illetve játékos elemeket visznek be az oktatási folyamatba, játékosításnak, idegen szóval gamificationnek nevezzük [11].

A matematikaoktatásban alkalmazott játékok tárháza széles, a sakk, a tábla-, társas- és kártyajátékok, papír-ceruza játékok, mellett megjelenik a LEGO, mint innovatív készségfejlesztő eszköz, valamint vannak, akik a mai trendek szellemében csak IKT-környezetben tudják értelmezni a játékosítást.

A dolgozat keretein belül egy kártyajáték matematikai alkalmazására mutatunk példát. Golick [12] művében számos olyan képességet sorol fel, melyet kártyajátékok közben alkalmazunk, ezáltal ezen képességek fejlődnek:

– gyors verbális vagy motoros reakció,
– valószínűségi gondolkodás,
– számfogalom,
– vizuális diszkrimináció,
– ritmusérzék,
– nyelvfejlődés,
– motoros, szociális készségek, képességek,
– számsor ismerete,
– számolás,
– vizuális és auditív memória.

Sok népszerű kártyajáték fejleszti a fejben számolás képességét, gyakori elem a stratégiaalkotás, hiszen sok esetben nem mindegy melyik lapot játsszuk ki és melyiket tartogatjuk későbbre.

[11] Tóthné Szalontay Anna–Wintsche Gergely (2016): Játékos tanulás. *Új Köznevelés.* 72. évfolyam 8. szám. Online elérhetőség: https://folyoiratok.ofi.hu/uj-kozneveles/jatekos-matematika

[12] Margie Golick (1981): *Deal me in!: The use of playing cards in learning and teaching.* New York: J. Norton.

A logikus gondolkodás fejlesztése mellett kártyázás közben fejlődnek a kommunikációs képességek (hiszen sok játékban megengedett a beszélgetés), a kooperáció, sőt a vitarendezés képessége is (pl. időben mondta-e az ellenfél, hogy „SOLO" vagy „makaó"). A kártyajátékok alaptulajdonsága, hogy bár viszonylag kevés lap van, de mégis több, mint amire könnyű lenne emlékezni, sokszor viszont előnyös, ha fel tudjuk idézni, mely lapok mentek már ki, így a játék fejleszti a memóriát is [13]. Az előzőekben felsoroltak alapján számos kártyajáték módosítás nélkül, az eredeti alapszabályokkal is remekül alkalmazható az oktatásban.

2. ábra. Kártyajátékok: Makao, SET, SOLO.

Az élménypedagógiai módszerek között a kártya tehát kiemelt jelentőséggel bír, pozitív hatást gyakorol a diákokra, észrevétlenül tanít, miközben könnyen hozzáférhető eszköz.

Közismert, hogy a mindenki számára elérhető magyar és francia kártya is kiválóan használható az oktatásban. Európában egyre több országban vezették be a bridzs oktatását az iskolákban, hiszen a fordulatos kártyajáték amellett, hogy megköveteli a társakkal történő együttműködést, a koncentrációt, fejleszti az emlékezőképességet, a gyors és logikus gondolkodást, kimutathatóan jótékony hatással van az iskolai teljesítményre is.

A klasszikus kártyák alapjaira támaszkodva új játékok is konstruálhatóak, jó példa erre a getSmart norvég gyártó által fejlesztett játékok egyike. A „getSmart Linar Functions" kártyát elsősorban 13–14 éveseknek ajánlják, a játék célja a lineáris függvényekre vonatkozó ismeretek elmélyítése.

[13] Arató Ferenc–Árvai-Homolya Szilvia–Bagota Mónika–Czapné Makó Zita–Lengyelné Szilágyi Szilvia et.al. (2018): *A Logikaalapú alprogram koncepciója.* Eger: EKE Líceum.

3. ábra. getSmart: „Lineáris függvények".

Forrás: http://getsmart.no/en/products

A már jól ismert játékokon túl azonban évről évre számos új termék is megjelenik a piacon, melyek a játékélmény mellett – a fentebb említett tulajdonságok okán – hatékonyan alkalmazhatóak az oktatásban is. A stratégiai kártyajátékok szintén átalakíthatóak a saját „igényeinkre", erre példa a következőkben bemutatandó Halli Galli logaritmus témakörben történő felhasználása.

Log Halli Galli

Az alapjáték

A Halli Galli játékcsaládhoz tartozó kártyajátékok közös jellemzője a dinamizmus. Gyorsaságot, figyelmet és ügyességet igénylő, alapvetően koncentrációfejlesztő játékokról van szó. Haim Shafir 1990-ben megjelent játéka 2–6 fő részére nyújt kiváló szórakozást kicsiknek és nagyoknak egyaránt. Az alapjáték kezdeti sikereire alapozva mára már több változatban is elérhető játékról van szó: *Halli Galli, Halli Galli Party, Halli Galli Extreme, Halli Galli Junior.*

4. ábra. A Halli Galli játékcsalád tagjai.

A játékszabályok nem mutatnak nagy eltérést, hasonló technikával játszható valamennyi kártyaparti. Egyszerűen, könnyen játszható játékokról lévén szó a szabályok gyorsan elsajátíthatók. A tanulási fázis ezeknél a játékoknál extrém rövid. Pozitív jellemzői miatt számos fejlesztő pedagógus használja a Halli Galli játékokat óvodás és kisiskolás korú gyermekeknél készségfejlesztő eszközként. A játékok nagy előnye, hogy egy parti kb. 10 percig tart, vagyis nagy lendületű, pörgős játékról van szó minden esetben. A játékmenet erősen épít a mintafelismerés készségére, valamint a játékosok gyors helyzetfelismerő képességére.

A 4 éves kortól 99 éves korig ajánlott játékot továbbfejlesztésre alkalmasnak gondoltuk, így készült el a logaritmus fogalmának mélyebb beépülését, valamint a fogalom helyes rögzülését támogató kártyajáték, amelynek a **Log Halli Galli** nevet adtuk. Az alapjáték kiválasztásánál figyelembe vettük, hogy a tanulóközpontú tanulásszervezés már bizonyított. A fokozott hallgatói aktivitás jelentősen növeli a tanulási motivációt és az oktatással kapcsolatos elégedettséget, amely mindent összevetve hozzájárul a tanulási teljesítmény emelkedéséhez [14].

A játék leírása

A Log Halli Galli-val egyszerre 4–8 játékos tud játszani. A standard kártyapakli 72 lapból áll. 70 kártyán logaritmusos matematikai kifejezés található, továbbá 2 kártyán mákvirág látható. 30 kiegészítő kártyát is tartalmaz a készlet, amely a differenciálás lehetőségét biztosítja, valamint a játék nehézségi szintjének variálását teszi lehetővé.

[14] Blumberg, P. (2004): Beginning journey toward a culture of learning centered teaching. *Journal of Student Centered Learning.* 2(1). Pp. 68–80.

A 70 alapkártyán a logaritmus definíciója alapján könnyen számolható kifejezések kaptak helyet, például:

- $\log_2 4$; $\log_2 32$; $\log_3 1$; $\log_3 9$; $\log_5 25$; $\lg 10$; $\ln e^2$; stb.
- $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_2 \frac{1}{8}$; $\log_{\sqrt{3}} 3$; $\log_3 \sqrt{3}$; $\log_{\frac{1}{5}} 5$; stb.
- $\log_4 \log_2 2$; $\log_2 (2^5 - 2^4)$; $\log_3 \sqrt[3]{3}$; $\log_3 9 \cdot \ln 1$; $\lg \log_2 1024$; stb.
- $4^{\log_4 \frac{1}{4}}$; $2^{\log_4 1}$; $2^{\log_{13} 13}$; stb.

A 30 kiegészítő kártyán olyan kifejezések találhatóak, amelyek fejben még számolhatók, de a logaritmus azonosságainak felhasználását is igénylik:

$$\lg 2 + \lg 5;\ 10^{\lg 2 + \lg 3};\ \log_{12} 36 - \log_{12} 3;\ \left(\sqrt{10}\right)^{4 \lg 2};\ \text{stb.}$$

Emellett 6 alapkártyát tartalmaz még a készlet és egy csengőre is szükség van a játékhoz. A játékidő kb. 25 perc.

Az alapkártyák kiosztásával kezdődik a játék, amely a logaritmussal kapcsolatos lényeges ismereteket tartalmazza: a definiáló összefüggést, a fontosabb azonosságokat, függvény grafikonokat és nevezetes értékeket. Ezt a kártyát minden játékos maga elé helyezi és szükség esetén tanulmányozhatja. Az alapjátékok szabályán nem változtattunk túl sokat, törekedtünk az egyszerűség megtartására.

A játékosok az asztal közepére, mindenki számára könnyen elérhető helyre teszik a csengőt. A kártyákat megkeverés után egyenlően szét kell osztani a játékosok között. 5 játékos esetén lesznek olyan játékosok, akik a játék elején több lapot kapnak, mint a többiek, de ennek kezdetben nincs jelentősége.

A játékosok egy lefordított paklit képeznek az átvett lapokból maguk előtt. A játékot például az a játékos kezdi, aki a legtöbb/legkevesebb pontot szerezte a matematika érettségin, de más szempont alapján is választható kezdő játékos.

Az éppen soron lévő játékos felfordítja a paklija legfelső lapját és azt a lefordított paklija és a csengő közé helyezi. A játékot rögtön folytatja a játékos baloldali szomszédja. A játékosok minden felfordított lapot a már korábban letett lapra tesznek, az *5. ábrán* látható módon.

5. ábra. A lapok helyes lerakásnak módja.

Így minden játékos előtt egy felfordított pakli képződik, melynek csak a legfelső lapja látható. Azért, hogy a játékos ne kukucskáljon be a saját lapja alá, és így ne tegyen szert előnyre, a soron következő lapot mindig a felső sarkánál megfogva, magától kifelé fordítja fel, ahogy ezt a *4. ábra* mutatja:

6. ábra. A kártyalapok felfordításának helyes technikája.

A kártyákon szereplő kifejezések értékét fejben ki kell számolniuk a játékosoknak és az alábbi három esetben kell csengetniük:

1. Ha legalább két kártyán ugyanaz a valós szám adódik értékként.
2. Ha a kártyákon szereplő kifejezések összege 0.
3. Rögtön csengetni kell, ha megjelenik a mákvirág.

7. ábra. Mákvirág lap.

Az a játékos, aki a fent leírt kártyakombinációk egyikének előfordulásakor a leggyorsabban csenget, lezár egy fordulót, így az összes felfordított lapot megnyeri. Jutalmul a megnyert lapokat a játékos lefordítva a saját paklija alá helyezi. Mielőtt ez megtörténik, igazolnia kell, hogy jogosan csengetett, vagyis meg kell mondania, hogy mely lapokon szerepel ugyanaz a valós szám értékként, illetve miért nulla a kártyákon található számok összege.

Amennyiben senki sem csenget, vagyis a három feltétel egyike sem teljesül, érdemes megbeszélni a lapokon lévő kifejezések értékét, ekkor mindenki bemondja az előtte fekvő kártyára írt valós számot. Az kezd, aki ebben a fordulóban először fordított fel lapot.

Ez a rész a játék tanulási fázisa, itt bátran lehet kérdezni is. Ezt követően a játékos új fordulót indít úgy, hogy felfordítja paklijának legfelső lapját. A játék alatt a játékosoknak kezeiket maguk előtt az asztalon kell tartaniuk és nem közvetlenül a csengő mellett. Nem szabad csengetni, ha a fent leírt feltételek nem teljesülnek. Ha egy játékos rosszul csenget, akkor a felfordított lapjait a csengő alá kell tennie. A játékostársak felfordított lapjai viszont az asztalon maradnak.

A játékot ekkor a játékos bal oldalán ülő szomszédja folytatja. Amikor egy játékos megnyer egy fordulót, akkor nemcsak a játékostársak felfordított lapjait veheti magához, hanem a csengő alatti lapokat is. Ha egy olyan játékos nyeri a fordulót, akinek van lapja a csengő alatt, akkor ebben az esetben a játékos csak a saját felfordított lapjait és a csengő alatti lapokat nyeri meg. A többi lap az asztalon marad a következő körre. Ha egy játékos már nem tud lapot felfordítani, mert lefordított lapjai elfogynak, kiesik a játékból. Az addig felfordított lapjai az asztalon maradnak, amíg egy játékostársa elnyeri azt. Akkor is kiesik a játékos, ha kétszer egymás után rosszul csenget.

Ebben az esetben a játékosnak az összes lapját a csengő alá kell tennie. A játéknak akkor van vége, ha már csak két játékos marad a játékban. Ők még a felfordított lapokért tovább játsszák a fordulót az első csengetésig, a következő szabályokkal:

– ha egy játékos az utolsó fordulóban jól csenget, akkor megkapja a felfordított lapokat;
– ha egy játékos az utolsó fordulóban rosszul csenget, felfordított lapjait játékostársa kapja meg, és a játék véget ér.

A játékot az a játékos nyeri, akinek a játék végéig a legtöbb lapja gyűlik össze. Egyforma lapszámok esetén a játékosok további fordulókat játszanak, amiben eldöntik, ki a játék nyertese.

Összefoglalás

A kártyás játékoknak a matematikával való rendkívül szoros kapcsolata vitathatatlan, mert ez a sajátos ismeretszerzési módszer rendszerezésre, figyelemre és következtetésre nevel. A matematikatanítás célja és feladata a szaktárgyi alapismeretek átadásával párhuzamosan a hallgatók önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása.

A felsorolt kompetenciák fejlesztése fontos részét képezi valamennyi hallgatóközpontú oktatási technikának. A játékkal történő tanítási módszerek alkalmazása napjainkra már az egyetemi képzés számos szegmensében megtalálható. Felzárkóztatási célokra kifejezetten alkalmas olyan fejlesztő eszközöket használni, amelyek pozitív élmények megszerzésével kapcsolják össze a kívánt célok elérését és hozzájárulnak a hallgatók saját ütemben történő, önállóan véghez vitt, szándékos és önszabályozott tanulási folyamatához, ezért szükségesnek láttuk megfelelő, az adott szakmai tartalom elsajátítását erőteljesen támogató matematikai játékok létrehozását.

A csoportban történő munka ugyancsak fejlesztendő kompetencia valamennyi műszaki és informatikai képzési területre felvett hallgató esetén, így a 2–6 fővel játszható Log Halli Galli játék számos ponton biztosít fejlődési lehetőséget a logaritmus fogalmával kapcsolatos legfontosabb szakmai ismeretek megszerzése mellett.

HUDOBA GYÖRGY *

Marskutatás otthonról – a „MarsRengések" program

* *Óbudai Egyetem, Alba Regia Műszaki Kar*
E-mail: hudoba.gyorgy@amk.uni-obuda.hu

Összefoglalás: A NASA InSight űrszondája 2018. november 26-án az Elysium Planitia régió sík, északi részén leereszkedett a Mars felszínére. A leszállóegység két szeizmométert is telepített a Marsra, melyek „élő" adatokat küldenek vissza a Földre. A várhatóan egy évig tartó misszió során a kutatók a talajrezgések tanulmányozása révén, a szeizmológia módszereivel kívánják felderíteni a Mars belső szerkezetét. A NASA a mérési adatokat publikussá teszi, és a „civil" kutatók segítségét is kéri az esetleges meteorit keltette becsapódási kráterek keresésében.

A „MarsRengések" program a 11–18 éves, a kutatás iránt érdeklődő diákokat szólítja meg. A programot „MarsQuake" néven a British Geological Survey, a National Space Academy és a Durham University kezdeményezte, melyet a magyar diákok számára is elérhetővé tettünk. Ennek során elkészült az oktatási anyagok és tantermi kísérletek leírásának fordítása, valamint két honlap (a Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló és az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete gondozásában), melyekről mindez, és még számos további információ is elérhető.
Kulcsszavak: InSight; Mars; marskutatás; marsrengés; földrengés; szeizmológia.

Abstract: The NASA InSight space probe has been landed on Mars at the Elysium Planitia region on November 26th in the year 2018. The probe installed two seismometers on the surface to send online data to the Earth. The mission scheduled to one year long for investigating the Martian insight. NASA will make public the data for "civil scientists", to find meteorite impact craters on Mars.

The MarsQuake project is intended to provide a set of teaching resources and classroom activities that will use the latest data and images sent back from the NASA InSight mission to Mars. The British Geological Survey, the

National Space Academy and the Durham University together published a background science booklet aimed at 11–18 year-olds students. The publications contained different activities including modeling and locating meteorite impacts known as 'marsquakes'. A translation of this book for Hungarian students has been prepared in 2018.
Keywords: InSight, Mars, Mars exploration, marsquake, earthquake, seismology.

Bevezető

InSight – az Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport megnevezésből alkotott betűszó. Küldetésének célja a Mars hőháztartásának vizsgálata, valamint a meteorit becsapódások okozta talajrezgések, a marsrengések tanulmányozása révén a Mars belső szerkezetének a szeizmológia módszereivel történő felderítése.

Az InSight – a cikk írásának időpontjában már 228 napja – sikeresen leszállt a Mars felszínére. Az azóta eltelt időszakban robotkarja segítségével telepítette a szeizmométer egységet. A hőáram mérésére szolgáló műszert viszont eddig még nem sikerült a szándékozott öt méteres mélységbe juttatni. Az erre való erőfeszítések még jelenleg is tartanak. A szonda kalibrációs folyamata így a vártnál is több hónapot vesz igénybe, ami után megkezdheti a tudományos adatok rendszeres szolgáltatását.

Az InSight-misszió és a SEIS-szeizmométer

A NASA InSight egy olyan geofizikai leszállóegység, amelynek feladata a Mars bolygó belsejének és belső folyamatainak a felderítése. A végső cél valójában az, hogy megtudjuk, hogyan is keletkeznek és formálódnak a kőzetbolygók.

A Mars belsejének titkait többek között hatalmas erejű marsrengésekkel lehetne megfejteni. Míg a Földön a rengések túlnyomó többsége a lemeztektonikához kapcsolódik, a Marson lemeztektonika – ismereteink szerint – nem működik. Ezért arra számítunk, hogy a bolygó szeizmikus aktivitása körülbelül 100-szor kisebb lesz, mint a Földé, azaz a marsrengések kisebbek lesznek és a számuk is sokkal kevesebb lesz, mint a földrengéseké, és zömüket meteorit becsapódások okozzák.

A SEIS (Seismic Experiment for Interior Structure) a Mars felszínének apró rezdüléseit méri. A műszer valójában 6 szeizmométerből áll, amik két különböző típusú egységet tartalmaznak: három széles sávú szeizmométert, amelyek 0,005 Hz és 1 Hz közötti frekvenciákon érzékenyek és három rövid periódusú műszert, amelyek a 0,05 és 40 Hz közötti frekvenciákon mérnek.

A szeizmométerek ingáit három különböző irányban helyezik el, hogy minden térsíkban mérjenek (fel-le, balra-jobbra és előre-hátra). A cél, hogy a 3 szeizmométer jelei alapján meg tudjuk határozni a rengéshullám beérkezési irányát.

A „MarsRengések" program

A „MarsRengések" program a „Szeizmológia az iskolában" kezdeményezés részeként indult el, mely révén igyekszünk elérni a földrengések és a csillagászat iránt érdeklődő fiatalokat. Ennek érdekében elkészült a Marsrengések – szeizmológia más bolygókon című ismeretterjesztő kiadvány [1], ami a British Geological Survey „MarsQuake" angol nyelvű kiadványának [2] szerkesztett fordítása. Eddig a témában cikkünk jelent meg az Élet és Tudományban [3], tartottunk több ismeretterjesztő előadást [4], [5], készült két honlap [6], [7], valamint megalakult egy Facebook-csoport is: „Marsrengések – kiből lesz marskutató?" [8] amely folyamatosan frissül az InSight híreivel. (A két ismeretterjesztő előadást a GalileoWebcast élőben közvetítette, melyek visszanézhetők az archívumból. A [4] eleve internetes előadás volt, az [5] pedig a Szkeptikusok XXIV. Országos Konferenciáján hangzott el). A fentieken túl részt vettünk tudománynépszerűsítő rendezvényeken is, úgymint

– Földtudományi Forgatag a Magyar Természettudományi Múzeumban.
– Budapest a Tudomány fővárosa 2018.

A British Geological Survey „MarsQuake" programjához kapcsolódó „MarsRengések" program révén a tudományos ismeretterjesztés egy új távlatát szeretnénk elindítani a földtudományokat és a csillagászatot érintő tantárgyakban Magyarországon. A programban egy rövid tananyag, továbbá órai feladatok találhatók, melyek során a NASA 2018-as InSight Mars expedíció által visszaküldött valós adatokat és képeket használhatják fel a diákok. Célunk továbbá az is, hogy a résztvevők betekintést kapjanak a tudomány működésébe.

[1] Kiszely Márta (ford.) (2018): *Marsrengések – Szeizmológia más bolygókon*. Budapest: MTA CSFK GGI. P. 73.

[2] Denton, P.–Stevenson, J. P.–McMurray, A. (2017): *Mars-Quakes – Seismology on another planet*. Nottingham: British Geological Survey.

[3] Kiszely Márta (2018): A Vörös Bolygó megfúrása – Meteorbecsapódások marsrengésekkel. *Élet és Tudomány.* 73, 22. Pp. 678–680.

[4] Hudoba György: *Célkeresztben a Mars!* [2018. október 15., 1 ó 50 p] (http://www.galileowebcast.hu/live/live_20181015.html)

[5] Kiszely Márta: Kiből lesz marskutató? [2018. november 17., 22 p] (https://www.youtube.com/watch?v=sV19m8okRV8&list=PLeNxi-TyRAb6ifbR10F9-IAQRhgTnaZkH&index=3)

[6] http://marskutatas.suliszeizmo.hu (MTA CSFK GGI)

[7] http://telapo.datatrans.hu/mars (Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló)

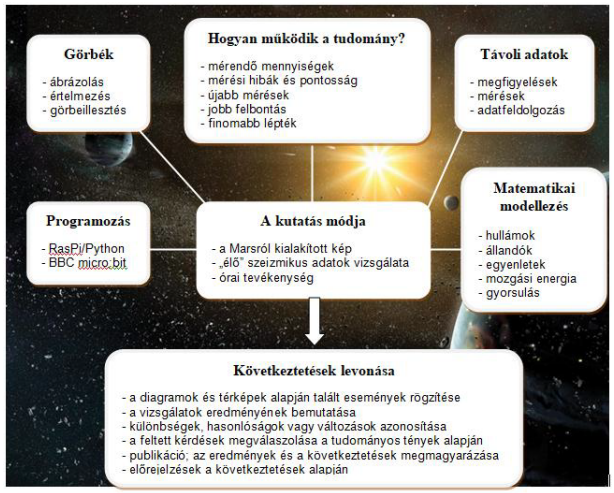
[8] https://wwwfacebook.com/groups/224695551607155

[1] Vermes M.–Wiedemann L. (1966): A rugalmas fonalú ingáról. *Fizikai Szemle*16. P. 26.

[6] http://marskutatas.suliszeizmo.hu (MTA CSFK GGI)

[7] http://telapo.datatrans.hu/mars (Terkán Lajos Bemutató Csillagvizsgáló)

1. ábra. A tudomány munkamódszerei.



A program összetett. Egyrészt ismerni kell a Mars nagyfelbontású képeit kezelő programot (HiView) és az InSight SEIS műszere által regisztrált jeleket megjelenítő és feldolgozó programot (jAmaSeis). Fel kell ismerni a szeizmikus hullámok fajtáit, és sok-sok egyéb csillagászati és szeizmológiai témában is kell tájékozódni.

A célközönség a 11–18 éves korosztály. A program végrehajtásához készült 73 oldalas segédanyag [1] nyolc fejezetet tartalmaz. Megtalálható benne többek között a Föld és a Mars bolygó összehasonlítása, planetológiai, geológiai és szeizmológiai alapismeretek, az InSight szonda küldetésének és műszereinek ismertetése, valamint 11 tanulókísérlet, melyek során a diákok modellezhetik a meteorit becsapódásokat, és vizsgálhatják a becsapódások hatását. A kiadvány szabadon letölthető mind a [6] mind a [7] honlapról. A letöltés előtt statisztikai okokból egy regisztrációs lap kitöltése szükséges.

Az eddigi eredmények és tapasztalatok

A MarsRengések programot a 2018-as év őszén hirdettük meg, melyre lakóhelytől függetlenül bárki csatlakozhatott. A programhoz. eddig mintegy 25 jelentkezés érkezett, köztük egy csillagász szakkör is. Jelenleg az alábbi településekről vannak jelentkezők: Balatonfüred, Budapest, Dombóvár, Érsekújvár, Gödöllő, Gyál, Kerepes, Mátészalka, Sásd, Sopron, Szeged, Székesfehérvár és Szigetszentmiklós.

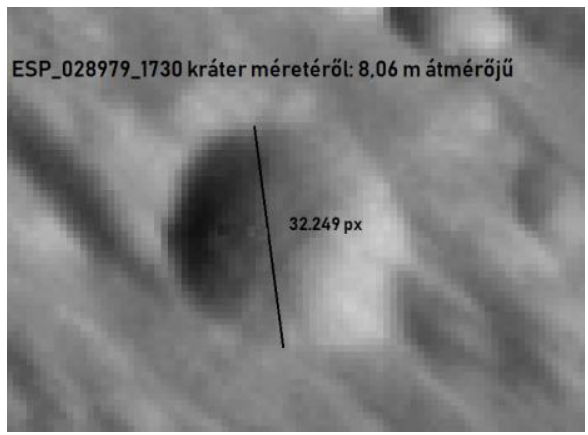
A programra jelentkezőknek nagy elszántságról kellett tanúbizonyságot tenniük, hiszen két, angol nyelvű programot is telepíteniük kellett a számítógépükre. Ezek a nagyfelbontású Mars képeket kezelő Hi-View és a suliszeizmométerek adatait feldolgozó jAmaSeis programok. Emellett meg kellett ismerkedniük a friss földrengések paramétereit közlő weboldalakkal, és fel kell tudni ismerni a P- és S-hullámokat. A jelentkezők életkori sajátosságai miatt, a facebook csoportunkon keresztül lehet a legkönnyebben tartani egymással a kapcsolatot. Akik jelentkeztek a csoportba, az InSight programmal kapcsolatos, a twitteren közzétett legfrissebb híreket (https://twitter.com/NASAInSight) és képeket itt magyarul is megtalálják, és láthatják a többiek kérdéseit, eredményeit is.

Az ifjú „marskutatók" cselekvési kedvét és nehézségeit megismerni, valamint felkészíteni őket a SEIS adatainak elemzésére, feladatokkal szándékoztunk elérni. Eddig két feladatot kaptak a tagok, a legfrissebb földrengések jAmaSeis-program segítségével való folyamatos megfigyelése mellett:

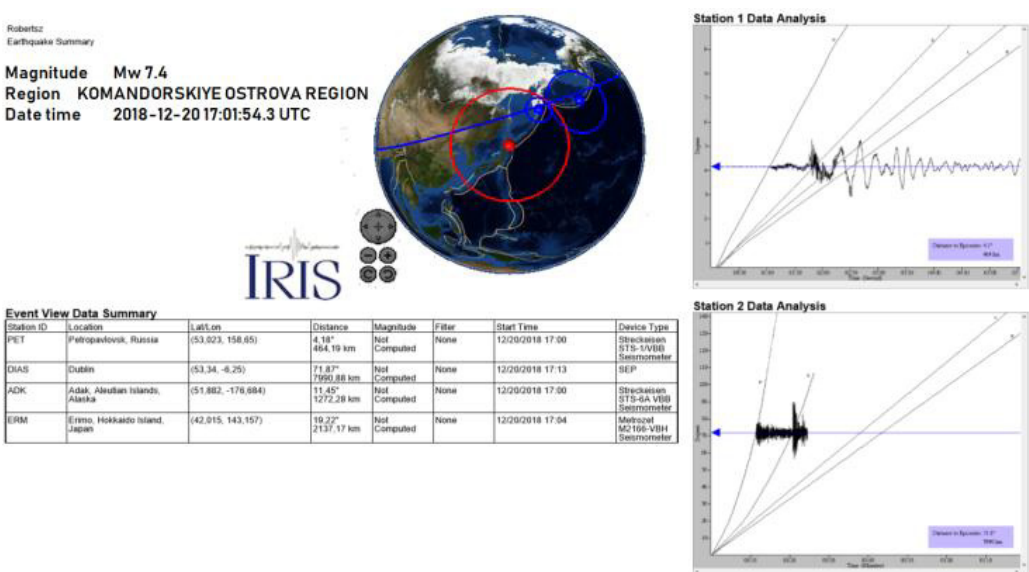
1. KRÁTER-KIHÍVÁS 2018: ez a feladat *Marsrengések – szeizmológia más bolygókon* kiadvány mellékletében található első tanulókísérlet elvégzését jelentette, azaz lisztre szórt kakaóporral kellett meteor becsapódásokat modellezni, és egy valódi marsi kráter nagyfelbontású képe alapján annak méretét meghatározni.

2. FELÜLETI SZEIZMIKUS HULLÁMOK A MARSON!: E feladat során meg kellett tanulni a felületi hullámok jellegzetességeit, és el kellett végezni egy számítási feladatot. Sajnos sokan lemorzsolódtak (kb. 50%), bár valószínűleg követik az InSight eredményeit. A legsikeresebb a mátészalkai Móricz Zsigmond Görögkatolikus Kéttannyelvű Általános Iskola csillagász szakköre volt Bardóczné Kocsis Erzsébet vezetésével és a székesfehérvári Lánczos Kornél Gimnázium fizika szakkörösei Újvári Sándor irányításával. Tapasztalatunk szerint a csapatban dolgozók – esetenként pedagógusi segítséggel – lelkesen tanultak bele a programba.

2. ábra. Szabó Bence gödöllői marskutató KRÁTER-KIHÍVÁS 2018 megoldása.



3. ábra. Szerencsi Róbert kerepesi marskutató társunk földrengés-epicentrum meghatározása a jAmaSeis-program segítségével.



Station ID	Location	Lat/Lon	Distance	Magnitude	Filter	Start Time	Device Type
PET	Petropavlovsk, Russia	(53.023, 158.65)	4.18° 464.19 km	Not Computed	None	12/20/2018 17:00	Streckeisen STS-1/VBB Seismometer
DIAS	Dublin	(53.34, -6.25)	71.87° 7990.88 km	Not Computed	None	12/20/2018 17:13	SEP
ADK	Adak, Aleutian Islands, Alaska	(51.882, -176.684)	11.45° 1272.28 km	Not Computed	None	12/20/2018 17:00	Streckeisen STS-6A VBB Seismometer
ERM	Ermo, Hokkaido Island, Japan	(42.015, 143.157)	19.22° 2137.17 km	Not Computed	None	12/20/2018 17:04	Metrozet M2166-VBH Seismometer

KOVÁCS IMRE *

Önszerveződés HOPG felületen létrehozott molekuláris rétegekben 1. rész

*Dunaújvárosi Egyetem, Műszaki Intézet
E-mail: kovacs.imre@uniduna.hu

Összefoglalás: A pásztázó tűszondás mikroszkópiai módszerek – pl. STM, AFM – megjelenése óta a felületi rétegek szerkezetének megfigyelése uralkodó vizsgálati módszerré vált. A grafit egykristály felülete ideális lehetőséget biztosít szénhidrogén molekulák kétdimenziós elrendeződésének vizsgálatára. A szilárd felületen kialakuló molekuláris szerkezetekben uralkodó erők speciális szerkezet kialakulását eredményezi. Modellvegyületek, mint nátrium-laurilszulfát és az óriás polikation, a Keggin-féle $[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}]^{7+}$ közötti kölcsönhatási erők a felületen félhenger alakú micellák, vagy akár egy vonalba rendezett polikationokat alakítanak ki. Az utóbbi szerkezet stabilitása korlátozott és könnyedén átrendeződhet. Vizsgálataink eredményei a továbbiakban a kétdimenziós rétegszerkezetek tervezéséhez, kialakításához járulhatnak hozzá, és a tervezett szerkezetek várható stabilitását is becsülhetjük.
Kulcsszavak: Mikroszkópiai módszerek, polikationok, kétdimenziós rétegszerkezetek.

Abstract: Detailed investigation on the structure of surface layers became one of the most frequently used since the development of Scanning Probe Microscopic methods – such as STM, AFM. The surface of HOPG crystals offer ideal possibilities to study the adsorption hydrocarbons. The adsorption bond on a surface results in a unique structure. In our model study the interaction between sodium dodecyl sulphate, SDS, and the giant polycation. $[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}]^{7+}$ results in the formation of hemi-cylinders or ordered lines of polycations. The later type of layer is not stable so it can rearrange. Our evidences make it possible to design and prepare such surface layers as well as to estimate their stability.
Keywords: Microscopic methods, polycations, surface layers.

[1] Binning, G.–Rohrer, H.–Gerbe, Ch.–Weibe, E.(1986): *Phys. Rev. Lett.* P. 49. 57.

[2] Binning, G.–Quate, C. F. (1986): *Phys. Ref. Lett.* Pp. 56. 930–933.

[3] Wiesendanger, R. (1987): *Rastertunnelmikroskopie an nichtkristallinen Festkörpern.*

[4] Bonnell, D. A. (1998): *Progr. in Surface Sci.* 57(3) Pp. 187–252.

[5] Bharat Bhushan(Ed.) (2010): *Springer Handbook of Nanotechnology.* 3rd edition. Berlin: Springer.

[6] Keggin, J. F. (1933): *Nature.* 131. P. 908.

[7] Wallace O'Neil Parker–Jr. Roberto Millini–Imre Kiricsi (1997): *Inorg. Chem.* Pp. 571–575.

[8] BOPAC-C, http://www.unichem.hu/pdf/termekek/64hu.pdf

[9] Kiricsi, I.–Molnár, Á.–Pálinkó, I.–Fudala, Á.–Nagy, J. B. (1997): *Solid State Ionics.* Pp. 101–103. 793.

[10] Comuzzi, C.–Dolcetti, G. –Trovarelli, A.–Cavani, F.–Trifiro, F.–Llorca, J.–Finke, R. G. *Catal Lett.* 36. P. 75.

Bevezetés

A pásztázó alagút mikroszkópia (STM) megjelenése [1] forradalmi változásokat eredményezett a felülettudományban. Kezdetben a vizsgálatok az atomi szintű felbontás elérésében merültek ki. Később az ún. jól definiált felületek – kevés lépcső, széles teraszok – használata volt jellemző. A jóminőségű grafit – HOPG – ennek tökéletesen megfelelt. Szigetelő anyagok vizsgálata az AFM, azaz atomi erő mikroszkópia kifejlesztése után lehetségessé vált [2].

A vizsgálati módszerek és kezdeti eredmények birtokában a kutatási célok is változtak. A kutatások elvi szempontból két részre oszthatók; i. a választott atomi szinten síkfelület a hordozó szerepét tölti be. 2. a felület maga is vizsgálat tárgyát képezi. Mivel az STM- és AFM-módszerek gyorsan elterjedtek Az utóbbi másfél-két évtized eredményeiből mára már számtalan összefoglaló mű is született [3, 4, 5]

Az általunk választott reakciójával a nemzetközi szakirodalomban MOF (metal-organic-framework) névvel emlegetett 3D-s szerkezetek egy váltazazát igyekszünk kialakítani 2D-ban.

Az alumínium, $[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}]^{7+}$ összetett kationja egy jól ismert vegyület. A poli-savakhoz hasonlóan a poli-bázisok esetében ismert ez a Keggin által felfedezett szerkezet [6]. Az ún. Keggin-Al13 szulfát krisztallográfiai szerkezetét Kiricsi és munkatársai már meghatározták [7].

Az ilyen poli-alumínium ionokat általában nem kristályosítják, hanem vizes oldatban gyártják, forgalmazzák és víz tisztítási eljárásokban alkalmazzák [8]. Rétegrácsos anyagok, rétegek közé ioncserélve egy nagy fajlagos felületű, magas hőmérsékleten is stabil katalizátort lehet előállítani. [9, 10]

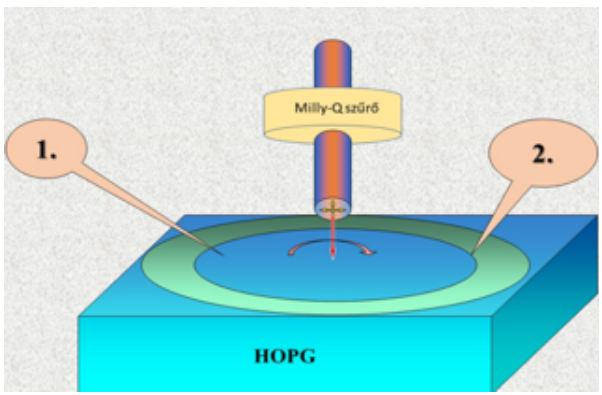
Anyagok és vizsgálati módszerek

Anyagok

A vizsgálatokhoz az ún. Al_{13} szulfátot – $Na[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}](SO_4)_4 \cdot 10H_2O$ – még a szerkezet felderítőjétől, Kiricsi Imrétől kaptuk, a kísérleteinkhez desztillált vízben oldottuk, ekkor a pH=4.5 volt és koncentrációja 250 mmol/dm^3. A HOPG-kristály felületét ún. lehúzással megújítottuk és az Al_{13}

szulfátot oldat 1-2 µl-ét Milly-Q szűrőn keresztül - (<0.2 mm) – a felületre cseppentettük. A mintán a cseppentést követően kialakult egy gyűrű melynek közepén a felvitt sórétegen STM-mérést tudtunk végezni. A módszert Barteau és munkatársai heteropolisavak STM-vizsgálatában már alkalmazták [11, 12]. A kísérlet elvi elrendezése az *1. ábrá*n látható.

1. ábra. A vizsgálandó oldatból kialakuló durvább felületű perem (2) és a belső terület ahol több eséllyel alakul ki monoréteg (1).



A kísérleteink második részében a felületre „sodium dodecil sulphat" azaz SDS-oldatot cseppentettünk (80 mmol/dm3 SDS). Ez után a felesleges oldatot leöntöttük, majd 150 µmol/dm^3 töménységű NaCl-dal ismét cseppentettünk, azaz a felületről az SDS egy részét lemostuk annak érdekében, hogy csak az irreverzibilisen kötött molekulák maradjanak a felületen.

Módszerek

Egy RHK-STM and STM-100 készülékkel szobahőmérsékleten és normál levegőben végeztük az STM- és STS-méréseket. Az STM-tűt egy 0.1 mm átmérőjű Pt/Ir drótból a mérések előtt frissen készítettük. A felvételeket a +0.3 V–1.5 V mintafeszültség és a 0.1 nA–1.5 nA alagútáram tartományban topografikus azaz kons-

[11] Barteau, M. A.–Lyons, J. E.–Song, I. K.–Catal. J. (2003) 216. P. 236.

[12] Song, I. K.–Barteau, M. A. (2004): *Langmuir.* 20. P. 1850.

[14] Oszkó, A.–Kiss, J. –Kiricsi, I. (1999): *Phys. Chem. Chem. Phys.* 1. P. 2665.

[15] Mercury 1.3 Copyright CCDC 2001–2004.

tans alagútáram üzemmódban rögzítettük. Az STM képek feldolgozásához a WSxM programját használtuk [13]. A röntgen fotonelektron-spektroszkópiai mérésekhez az KRATOS, XSAM800 készüléket használtuk a felületen az alumínium jelenlétének kimutatására, mind az Al KĮ„ mind a Mg KĮ röntgen-fotonokkal gerjesztve a felületet. Mindkét fotonenergiára szükségünk volt a felületi elemek – Al, O, Na és S – egyértelmű azonosítására.

A DFT-számításokkal kapott molekulapályákat ionizációs energiáit összevetettük a vegyérték sáv fotonelektron spektrumával. A méréseink szerint az Al 2p esetében a 74.8 eV, valamint az O 1s 532.2 eV. pályák helyzete csak kismértékben tér el a mások által is megfigyelt adatoktól [14].

Az eredményeink értelmezéséhez, megjelenítéséhez a „Mercury, CCDC" programot használtuk. [15].

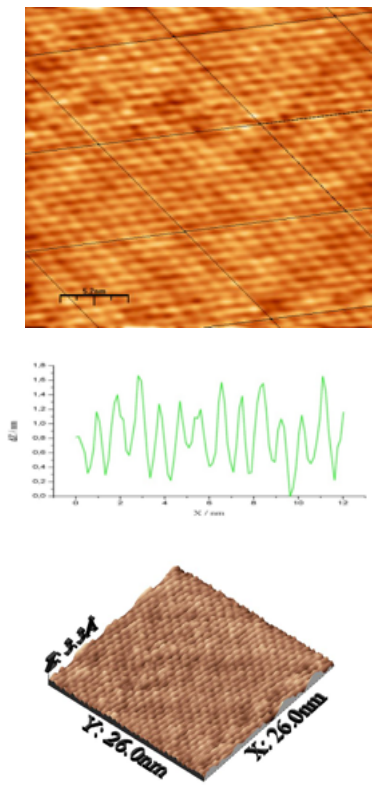
Eredmények és értelmezésük

A poli Al13 elrendeződése HOPG-n

A kísérleti részben leírtak szerint egy friss grafit felületre a $Na[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}](SO_4)_4.10H_2O$ só vizes oldatát cseppentve olyan rétegeket kaptunk 1. szabályos, sík teraszokat láthatunk, jellemzően kb. 1nm-es magasságú lépcsökkel, *2. ábra.*

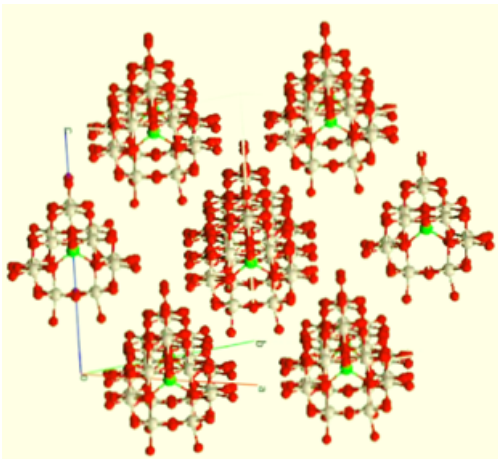
A „hibamentes" területeken sikerült jó felbontást kapni az egyes egységek elrendeződéséről.

2. ábra. Az ábra alsó részében egy sík terület legrészletesebb felbontását láthatjuk. A jobb oldali ábrán ugyanaz a kép látszik. Az ábra felső részében a 10 cellán át kapott vonalprofilt láthatjuk.



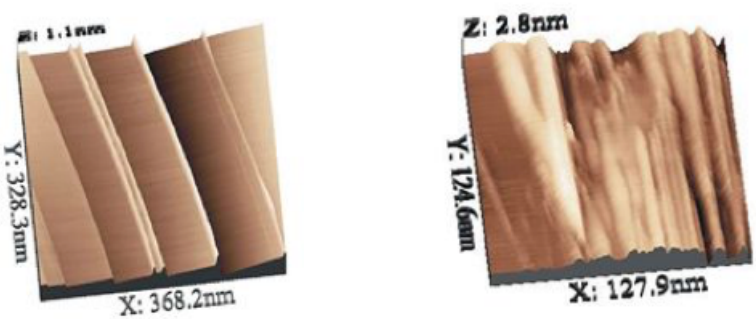
A *2. ábra* képén a WSxM programmal kapott átlagos elemicella paraméterei 1.35 nm x 0.9 nm és R=85°. A míg a tömbi 1.7 nm x 1.7 nm x 1.7 nm élhosszúságú szabályos kockától eltér. Az értelmezéséhez segítségül kell hívjuk a krisztallográfiai adatokat és azokkal megszerkesztjük az Al13-egységek elrendeződését láthatjuk. Az Al-atomokat O-hidak kötik össze és az egyes egységeket OH-csoportok zárják le (*3.ábra*). A legbelső helyzetű alumínium tetraéderesen koordinálódik. A *3. ábrán* látható egy elemicella és környezete.

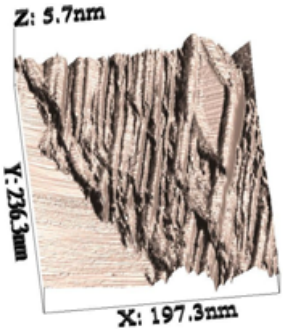
3. ábra. A Keggin-típusú egységek elrendeződése egy kristályos, tömbi szerkezetben. Az elemi cella oldalait is feltüntettük.

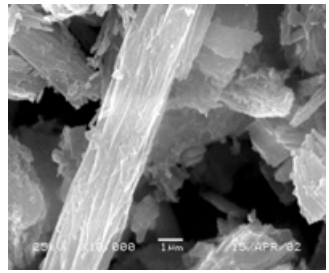


A fenti szerkezeten nem látszanak a töltéskompenzáló ionok, szulfátok és Na+ és a kristályvíz molekulák sem! Megfigyeltünk még további, jellegzetes, teraszos szerkezeteket melyek nem alakítottak ki szabályos teraszt, de jellemzően 1 nm -es szabálytalan lépcsőzetes szerkezet jött létre lásd *4. ábra*. A jellegzetes Al13 képeket az ábra jobb alsó képével is összevethetjük, ahol egy SEM-kép látható. Megfigyelhetjük, hogy mindkét léptékben – az STM-képeken is mind a SEM-képeken az egy dimenziós növekedési vagy rendezési irány dominál.

4. ábra. Változatokat mutat be a grafit felületén kialakuló jellegzetes Al13 rétegekre.



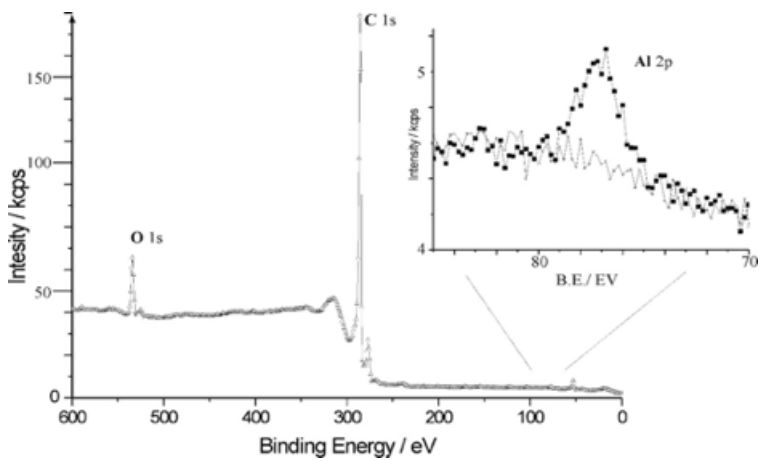




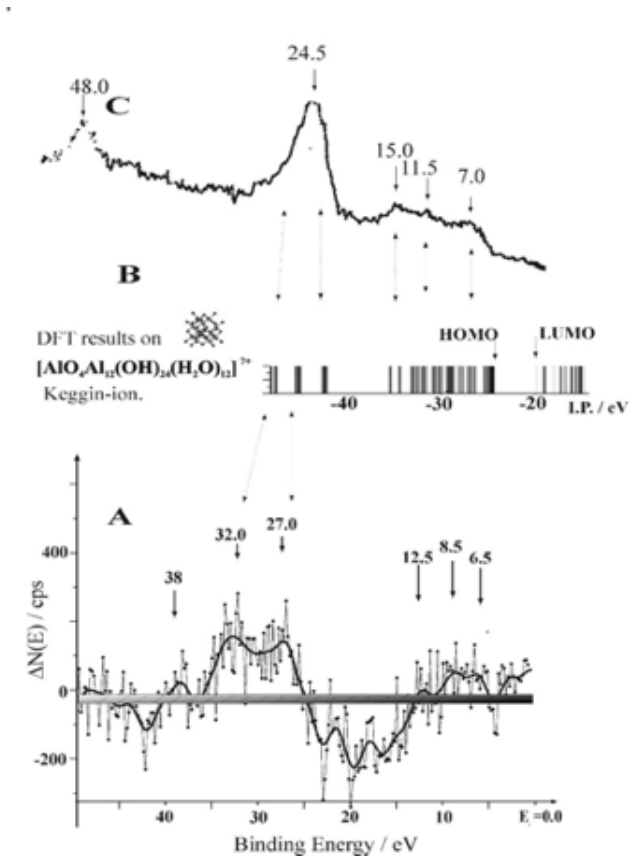
XPS vizsgálatok

Monokromatikus röntgen fotonokkal gerjesztve a felületet. A spektrumot a C1s csúcs dominálja (*5. ábra*). A vékony rétegben jelenlévő szervetlen szerkezeten átjönnek a hordozóból, HOPG-ből jövő elektronok. Az oxigén és az Al-jel az amit még a Keggin-réteghez rendelhetünk. A következő (*6. ábra)* a vegyérték elektronok tartományát mutatja.

5. ábra. A vékony rétegben a grafiton levő $Na[AlO_4Al_{12}(OH)_{24}(H_2O)_{12}](SO_4)_4.10H_2O$ áttekintő XPS spektruma.



6. ábra. A vegyérték elektronok - 0–50 eV kötési energiájú - tartománya az XPS-spektrumon, C , B rész, középen a DFT számításokkal Keggin-szerkezetre kapott MO pályák el elhelyezkedése. Alul, A részben a vizsgált tartományban a spektrum változását mutatja eltérő fedettségnél.



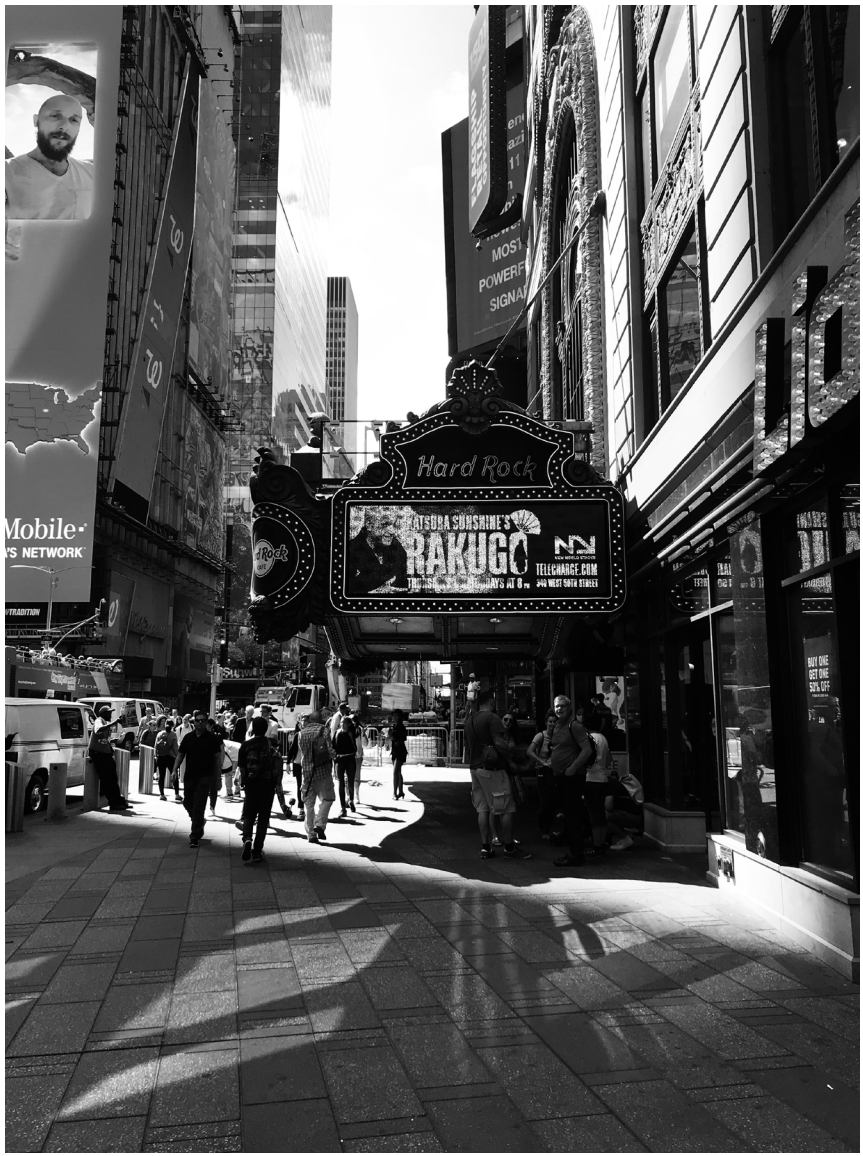
(A cikk folytatása a januári lapszámunkban következik.)

Galéria

Németh István fotói – Manhattan

MACY'S

MACYS


Hard Rock
KATSURA SUNSHINE'S
RAKUGO
TELECHARGE.COM
Mobile
'S NETWORK

DR
DUANEreade
OPEN24hrs
pharmacy
DUANEreade
pharmacy
BRINKS

MARRIOTT MARQUIS
SAMSUNG
AMERICAN EAGLE OUTFITTERS
C BAO
C BAO
HOTDOGS
JORDIN SPARKS
WAITRESS
NOW PLAYING ON BROADWAY
belgian waff

TO VANDERBILT AVENUE
TICKET MACHINES
SUBWAY
TICKET MACHINES
TRACKS 31 TO 42