Dunakavics

A Dunaújvárosi Egyetem online folyóirata 2019. VII. évfolyam VIII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

Takács Anna Mária–Kling Anna
Művészet–narratívum–matematika

Kovács Márk–Agg Péter András–Johanyák Zsolt Csaba
Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával

Nagy Péter–Tasnádi Péter
Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete

Dunakavics

A Dunaújvárosi Egyetem online folyóirata 2019. VII. évfolyam VIII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

Megjelelenik évente 12 alkalommal

Szerkesztőbizottság

András István, Ágoston György, Balázs László, Nagy Bálint, Németh István,
Rajcsányi-Molnár Mónika, Szabó Csilla Marianna.

Felelős szerkesztő Németh István
Tördelés Duma Attila

Szerkesztőség és a kiadó címe 2400 Dunaújváros, Táncsics M. u. 1/a.

Kiadja DUE Press, a Dunaújvárosi Egyetem kiadója
Felelős kiadó Dr. habil András István, rektor

A lap megjelenését támogatta a Nemzeti Kulturális Alap

TÁMOP-4.2.3-12/1/KONV-2012-0051
„Tudományos eredmények elismerése és disszeminációja
a Dunaújvárosi Főiskolán”.
http://dunakavics.due.hu
ISSN 2064-5007

Tartalom

Jelen lapszámunkban a MAFIOK-konferencia anyagaiból válogattunk.

TAKÁCS ANNA MÁRIA–KLING ANNA
Művészet–narratívum–matematika 5

KOVÁCS MÁRK–AGG PÉTER ANDRÁS–JOHANYÁK ZSOLT CSABA
Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával 23

NAGY PÉTER–TASNÁDI PÉTER
Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete 31

Galéria 47
(Duma Bálint fotói)

TAKÁCS ANNA MÁRIA *–KLING ANNA **

Művészet–narratívum–matematika

Összefoglalás: Mit jelent a „szépség" a matematikában? Mi a szép egy matematikus, illetve egy hallgató számára a matematikában? Mit jelent a szépség egy hétköznapi ember számára? Pszichológiai kutatások eredményeit gyűjtöttem egy csokorba. Bruner narratív elmélete alapján összekapcsoljuk a művészeti alkotásokat matematikai fogalmakkal. A digitális oktatás forradalmát éljük. A felsőoktatásban a Z-generációba sorolt hallgatókat tanítjuk. A generáció szülötteinek a figyelemkoncentrációját figyelembe véve, szintén bekapcsoljuk a művészetet a matematika előadásainkba. Ugyanakkor keressük azt is, hogy milyen módon vonhatjuk be a digitális eszközöket. Milyen élményekhez juttathatjuk általuk a hallgatókat matematikából? Az alábbiakban egy ókori szépség elemzését mutatjuk be, valamint Van Gogh festményeinek egy lehetséges matematikai bemutatását.
Kulcsszavak: Pszichológiai kutatások, Fibonacci-sorozat, élményalapú oktatás.

Abstract: What is 'beauty' in mathematics? What attracts a mathematician or a student in mathematics? What is beauty for an ordinary person? I have gathered the results of psichological investigations in a bouquet. With the narrative theory of Bruner we can make a connection between the art masterpieces and the conceptions of mathematics. We are living in the era of digitalized training methods. At the university we educate the students of generation Z. Given the concentration of attention of the members of this generation, we also incorporate art into our mathematics lectures. Also we are looking for how can we utilize digital appliances in our lectures? What experiences can we convey by them to our students in mathematics? We may refer to the interaction of art and mathematics in lecture. From this point of view we analyse an atique beauty and some of Van Gogh's paintings.
Keywords: Psychological research, Fibonacci sequence, Experience based teaching.

*Budapesti Gazdasági Egyetem, Pénzügyi és Számviteli Kar
E-mail: takacs.anna@uni-bge.hu

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar
E-mail: kling.anna7@gmail.com

A matematika szépsége

„Aki nem ismeri a matematikát, annak nehéz megértenie a természet legmélyebb szépségét…"

Az idézet Richard Feynman-tól származik, aki a 20. század egyik legnagyobb fizikusa volt.

G. H. Hardy, angol matematikus, a számelmélet és a matematikai analízis kiemelkedő kutatója a következőket mondta: „A matematikus mintáinak a festő vagy a költő mintáihoz hasonlóan álomszépnek kell lenniük. Az elméletek között is, mint megannyi szó vagy szín között, összhangot kell teremteni. A legelső szempont a szépség: csúnya matematikának nincs helye a világban. A matematikai szépséget nehéz ugyan meghatározni, de minden szépséggel így van az ember – nem tudjuk, mit értünk szép vers alatt, de ez nem akadályoz meg minket abban, hogy felismerjük őket."

Azért is fontosak a fenti sorok, mert a szépművészetre is utalnak. De nem csak a festmények, művészeti alkotások lehetnek szépek. Minden tudományterületnek megvan a maga szépsége, a matematikának is. A matematikusok agya másként működik. A matematikusokban bizonyos matematikai formulák ugyanolyan kellemes érzéseket keltenek, mint a szépművészeti alkotások vagy a zene. A jelenség titka az agy neurobiológiai működésében keresendő: a matematikusok agyában bizonyos összefüggések láttán az „érzelmi agyterületek" aktiválódnak.

A *University College London* kutatói 16 matematikus (3 nő, 13 férfi; életkoruk: 22–32 év) részvételével vizsgálták, milyen agyi ingereket keltenek, és ezzel párhuzamosan milyen érzéseket váltanak ki különféle matematikai formulák. A matematikai doktorátust szerzett vagy felsőfokú matematikai végzettségű résztvevők 60-féle matematikai képletet értékeltek aszerint, hogy szépnek, közömbösnek vagy csúnyának találják azokat. A látott kép által kiváltott agyi aktivitást funkcionális mágnesesrezonancia (fMR-) vizsgálattal figyelték.

Minden bonyolult matematikai képlet megtekintését és értelmezését igen nagyszámú agyterület aktiválódása kísérte, de a szépnek ítélt matematikai formulák az agy emóciókért felelős területét – az orbitofrontális kéreg medialis régióját – is aktiválták. Sőt, minél szebbnek találtak egy egyenletet, annál nagyobb jelintenzitást láttatott az fMR-felvétel ezen a területen.

A nem matematikusokból álló 12 fős kontrollcsoportban nem tapasztaltak hasonló érzelmi reakciókat. Itt a megkérdezettek alig néhány matematikai képletet találtak ránézésre szépnek, többségük bevallottan nem értette, mit takarnak a felvillantott bonyolult egyenletek.

Két héttel később meg kellett ismételniük a feladatot fMRI-vizsgálat közben. Mind közül az Euler-képlet, a Pitagorasz-tétel és a Cauchy–Riemann-egyenletek örvendtek a legnagyobb népszerűségnek, amelyek közül az elsőt a hamleti monológ szépségéhez hasonlították. [2]
A matematikai szépség ismérveit a következőkben foglalhatjuk össze: kellemes a megjelenése, szimmetrikus, meglepő, váratlan (paradox), összefügg különböző szabályszerűségekkel, elegáns, (tömör és mégis teljes) egyszerű, tömör, harmonikus, hasznos, a természetben előforduló. [3]
Ezért is gondoltam, hogy matematika előadásokon a fentiek és a Z-generáció sajátosságainak ismeretében, példákat mutatok a szépművészet és a matematika összekapcsolásával.

Pszichológiai kitekintés

Az oktatás elméletének a tudással és a képességekkel kapcsolatos modelljei különböző forrásokból származnak. A kutatási trendeket meghatározó elméleteket és az oktatás napi gyakorlatáról való gondolkodást egyaránt átszövik azok a nézetek, amelyek több mai tudományág közös eredetéig nyúlnak vissza, illetve a más tudományágakból származnak. Ebből a szempontból mindenekelőtt a filozófia és a pszichológia hatása meghatározó jelentőségű, de az utóbbi évtizedben már számottevő a szociológia, az informatika, a kognitív tudomány és a közgazdaságtan néhány ágának az oktatás kutatására gyakorolt hatása is. A tudással kapcsolatos pedagógiai nézetekben mind a mai napig felismerhetőek a filozófiai gyökerek.

A képességekkel kapcsolatos álláspontok fejlődését több pszichológiai irányzat is befolyásolja. Ezek közül három olyat érdemes kiemelni, amelyik folyamatosan fejlődő elméleteivel és kutatási eredményeivel egészen napjainkig hat az iskolai oktatással kapcsolatos kutatások képesség-felfogására is: a pszichometria, a Piaget-iskola és a kognitív pszichológia. A pszichometria (az egyéni különbségek pszichológiája) elsősorban a képességek kvantitatív jellemzőivel foglalkozik. Piaget és követői az emberi értelmesség lényegét a műveleti gondolkodásban látták. Az elmélet szerint az értelmi fejlődés az egyszerű művelet előtti sémáktól a konkrét műveleti gondolkodáson át a formális gondolkodásig vezet. A kognitív pszichológia, mint a megismerést információ-feldolgozásként leíró irányzat jelenik meg. [1]

[1] Csapó Benő (2001): *A kognitív képességek szerepe a tudás szervezésében. Tanulmányok a neveléstudomány köréből.* Budapest: Osiris. Pp. 270–293.

[2] A matematikus agy másként működik, http://pharmaonline.hu/cikk/matematikus_agy__maskent_mukodik [Accessed 2014. március 6.]

[3] https://tudomany.blog.hu/2017/07/27/a_matematika_szepsege [Accessed 2017. július 27.]

A kognitív forradalom óta, mely a kilencvenes évekre tehető, folyamatosan módosulnak az elgondolások az emberi elme természetéről. Ezek az elgondolások a kognitív működésről szóló két élesen eltérő elgondolásból nőttek ki. Ezek közül az első az a feltevés volt, mely szerint az elmét el lehet képzelni komputációs szerkezetként is. A másik feltevés szerint az emberi kultúra egyfelől alkotóeleme az elmének, másfelől az elme az emberi kultúra használata során valósul meg.

Az első, komputációs nézet az információfeldolgozással foglalkozik, azzal, hogy a világról szólóvéges, kódolt, egyértelmű információt hogyan vési be, szűri, tárolja, kapcsolja össze, állítja helyre, és általában kezeli egy komputációs szerkezet. Az információt úgy veszi, ahogy kapja, olyasvalamiként, ami már beágyazódott valamiféle eleve létező, szabályok által korlátozott kódba, amely a világ állapotait fedi le.

A második megközelítés, a kulturalizmus ihletője az az evolúciós tény, hogy az elme nem tudna létezni, ha nem lenne kultúra. Hiszen az emberszabású elme evolúciója egy olyan életmód kialakulásához kapcsolódik, ahol a valóságot egy olyan szimbólumrendszer képviseli, melyet az adott kulturális közösség minden tagja ismer. Ebben a közösségben ez a szimbólumrendszer egyszerre szervezője és létrehozója a technikai-szociális életnek. [4]

A narratív tétel: Milyen gondolkodásmód, illetve érzések segítenek a gyerekeknek vagy a felnőtteknek abban, hogy a világnak egy olyan verzióját hozzák létre, amelyben számolhatnak majdani helyükkel- ez a saját világuk. Bruner úgy véli, hogy a történetmesélés, a narratívum szükséges ehhez. A narratívum mint gondolkodásmód és a jelentésalkotás közvetítőközegeként jelenik meg. Úgy gondolja, hogy két nagy útja van annak, ahogyan az emberi lények kezelik és szervezik a világról való tudásukat, ahogyan közvetlen élményeiket strukturálják. Az egyik inkább a fizikai „dolgok" kezelésére szakosodott, a másik pedig az emberek és állapotuk kezelésére. Az egyiket a szaknyelv logikai-tudományos, a másikat pedig narratív gondolkodásnak nevezi. Egyik kultúrából sem hiányoznak, de a kettőt a különböző kultúrák másképpen részesítik előnyben. [4]

Egy tanulmányban már foglalkoztam kognitív szemléletű kérdéssel, nevezetesen azt vizsgáltam, hogy definiált univerzális kognitív kategóriák és a Bruner-féle reprezentációs síkok milyen hierarchiát mutatnak a függvényjellemzés folyamatában. A struktúrát Galois-gráffal jelenítettem meg. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a számítógép bekapcsolása az analízis tanulás-tanítás folyamatába az ellenőrzési fázisban, a konkrét cselekvések szakaszában célszerű. [5]

[4] Bruner, J. (2004): *Az oktatás kultúrája.* Budapest: Gondolat. Pp. 14–51.

[5] Klingné Takács Anna (2011): Kognitív kategóriák az analízis számítógépes oktatásában. *Kitekintés–Perspective Magyar–román–szlovák periodika*. Különszám. Békéscsaba: Szent István Egyetem Gazdasági Kar.

Digitalizáció

Milyen generációkat és elméleteket ismerünk?

A generációkutatások megjelenése a 20. század második felére tehető: az egyes nemzedékek és jellemzőik csoportosítására többféle megközelítés létezik, melyek közül a legmeghatározóbb elméleteket foglalja össze az alábbi táblázat. Az 1925-től napjainkig születettek generációs jellemzőinek áttekintése alapján láthatóvá válnak a motiváció és kommunikáció meghatározó aspektusai, azonban fontos megjegyezni, hogy a generációk e felosztása továbbra is vita tárgyát képezi.

Csendes vagy veterán generáció (1925–1942)

Tagjaira a pálya széléről figyelő (óvatos, visszafogott), biztonságra törekvő magatartás jellemző. Magánéletükben a családi értékek kiemelt fontossággal bírnak. Nehezen tudnak megbirkózni a digitális társadalom kihívásaival, a „felgyorsult világgal".

Próféták/Idealisták – Baby-boomerek (1943–1960)

Tagjaik a háború után születtek, ifjúkorukat a civil mozgalmak határozták meg. Gyermek- és fiatal felnőttkorukat a lázadás, a szabálytagadás jellemezte (pl. hippikorszak). Motivációs struktúrájuk elemei: megfelelés, mély szakmai tudás, a sokoldalúság igénye.

Nomádok/Reaktívak/Digitális bevándorlók – X-generáció (1961–1981)

Az ébredés, a „lelkiismereti forradalom" ciklusának gyermekei: a hírnöknemzedék/átmeneti generáció fiatalkorát a relatív béke és jólét korszakában töltötte. Megoldáskereső, megbízható, kontrollált magatartás jellemzi őket, mely elmélyült szakmai igényességgel és tudással párosul. Motivációs struktúrájuk elemei: státus, pénz, a társadalmi ranglétrán való előrejutás.

Hősök/Civilek/A digitális bennszülöttek első generációja – Y-generáció (1982–1995)

A posztmodern világ szülöttei, akik a 2001. 09. 11. utáni krízisperiódusban élik fiatalkorukat. Tagjai magabiztos, energikus, kifejezetten tehetséges, kreatív személyek, akik a korábbitól jelentősen eltérő viselkedést mutatnak a tanulás és a munkavégzés területén. Együtt nőttek fel a modern technika fejlődésével, információéhségük kifejezett, a multikulturális környezetet könnyedén, laza attitűddel kezelik, és jellemző rájuk a „multitasking". Motivációs struktúrájuk elemei: a kortárs csoportok hatása erős, szívesen dolgoznak társakkal együtt, ugyanakkor jellemző rájuk a céltalanság és a kiszámíthatatlanság is.

Művészek/Alkalmazkodók/Netgeneráció/Digitális bennszülöttek – Z-generáció (1996–2010)

A terrorizmus krízisperiódusában, a globális válság és a klímaváltozás idején születtek. Életüket „bedrótozva" élik (szimultán több médium felhasználói): bátrak, kezdeményezőek, kevésbé kételkednek saját képességeikben és korlátaikban, praktikus szemléletűek. Motivációs struktúrájuk elemei: „Beleszülettek" az internet világába, mely emberi kapcsolataikat és kommunikációjukat is átalakítja: az online világ kitá-

gítja énjük határait, és alakítja identitásukat. Az offline vagy „való" világban konfliktuskezelési készségük hiányos (pl. indulatkezelési nehézségek, agresszió, a tekintélyhez való megváltozott viszony).

Alfa generáció (2010–)

A 2010 után születettek korosztálya, amelyről még nagyon kevés információ áll rendelkezésünkre. Több helyen „új csendes" generációként említik, mivel családi és óvodai viselkedésükre a korábbiakhoz képest csendesebb, visszafogottabb viselkedés jellemző (ugyanakkor egyes tagjainál az agresszió erősödése is megfigyelhető).

Mindebből látható, hogy a generációk közötti különbségek akár a harmonikus kommunikáció, az egymást értő és megértő együttélés akadályává is válhatnak. A meg nem értésből adódó generációs szakadék családi és oktatási szituációkban egyaránt gondot okozhat, különös tekintettel a kulturális, motivációs és szocializációs különbségekre. A millenniumi generációk (Y és Z) „digitális bennszülöttként" könnyen és gyorsan eligazodnak a digitális világban, melynek jellemzői elsősorban nem technikai, sokkal inkább kulturális értelemben meghatározottak: az így létrejövő digitális kultúra komplex, megfoghatatlan, interaktív (kölcsönös, közvetlen kapcsolaton alapuló) és interkonnektív (a folyamatos összekapcsoltság érzetét kelti), elemei testre szabhatóak. [6, 7]

[6] Komár Z. (2017): Generációelméletek. *Új Köznevelés folyóirat. Pp.* 8–9.

[7] Fülöp H. (2018): Digitalizáció az oktatásban: mindig csak egy lépést – interjú Horváth Ádámmal, a Digitális Pedagógiai Módszertani Központ vezetőjével. *Modern Iskola*. https://moderniskola.hu/2018/02/digitalizacio-az-oktatasban-mindig-csak-egy-lepest-interju-horvath-adammal-digitalis-pedagogiai-modszertani-kozpont-vezetojevel/ [Accessed 2018. február 21.]

A DIGITÁLIS jólét kormányprogram a felsőoktatásról – Tanulásintenzív felsőoktatás kialakítása

A felsőoktatási digitális stratégia egyik legfontosabb célja a globális digitális világ által kikényszerített oktatási-tanulási kultúraváltásra vonatkozik, amit a digitális eszközök oktatásban való felhasználása támogat. Ez a cél szoros összefüggést mutat a stratégia második céljával, amely a digitális felsőoktatási tér kialakítására vonatkozik – a kettő egymás nélkül elképzelhetetlen és megvalósíthatatlan. A tanulásintenzív felsőoktatásra vonatkozó cél főként az oktatói-hallgatói viszony mikéntjére, illetve az oktatási módszertanokra, az oktatási eredményességet szolgáló felsőoktatás kialakítására vonatkozik. A javasolt beavatkozások mindkét cél elérését támogatják. A felsőoktatás módszertanáról főként nemzetközi tapasztalatok állnak rendelkezésre, a hazai oktatói réteg felkészültségével kapcsolatban kevés bemeneti adat állt elő. Ezért fontos olyan kutatások kivitelezése, amelyek ezt a területet vizsgálják, fejlesztik. A kiemelt kutatás-fejlesztési projekt a digitális tanulás tudományterüle-

teihez kapcsolódó doktori iskolákat működtető felsőoktatási intézmények, kutatóhelyek és vállalatok összefogásával, hálózatosodásával és nemzetköziesítésével valósulhat meg leghatékonyabban – oktatási innovációk, módszertani kutatások, a nemzetközi online oktatási-kutatási térbe való kilépés támogatása. E kutatások kitérhetnek a nemzetközileg már működő multinacionális cégek képzési gyakorlatainak adaptációjára, nagy volumenű online képzésmenedzsment rendszerek megismerésére és megismertetésére. A kutatások eredményeként kialakítható a digitális tanulás K+F+I adatbázisa, amelyen keresztül a jó gyakorlatok közzététele is folyhat. Emellett szükséges a digitális tanulással kapcsolatba hozható tudományterületek összekapcsolása, a meglévő ilyen tematikájú felsőoktatási kutatóközponti tudás erősítésével, új, releváns tapasztalattal rendelkező intézmények, szervezeti egységek bevonásával – ennek a folyamatban be kell tagozódnia a kialakítandó digitális módszertani központba. A fent javasolt kutatások felhalmozzák azt a tudást, amely az oktatók módszertani kultúrájának fejlesztését támogató továbbképzések, felkészítések megalapításához szükségesek. Az oktatói kar korfája nem optimális, az idősebb generációk pedig teljesen más oktatás-technológiai környezetben szocializálódtak, mint a jelenlegi hallgatók. Ezért az oktatói kar továbbképzésének két fő területe az oktatásmódszertan (oktatástechnológia), illetve az általános digitális kompetenciák fejlesztése kell, hogy legyen. [8]

[8] Digitális jólét program, www.kormany.hu, [Accessed 2016. június 30.]

Matematikai szorongás és digitalizáció

Sok diáknak a matematika a „mumus". Az alsóbb osztályokban kedvelik a tantárgyat, aztán később ez átalakul. Gyakran a reklámokban is azt sugározzák, hogy a matematikától fáj a fejed, beteg leszel. Ha a tanító néni vagy bácsi is „félt" a matematikától, ezt a félelmet az oktatás során tovább adja. Ezt segítheti leküzdeni, ha matematikai játékokat játszunk a gyerekekkel. Ezek lehetnek hagyományosak, de számítógépes alkalmazások is. Az oktatásba is vonjunk be interaktív alkalmazásokat. Ennek jó példája hazánkban a GEOMATECH-projekt keretében elkészült tananyagelemek.

Magát a tanulási és tanítási folyamatot is újra kell tervezni, és ez talán még nagyobb kihívást jelent. Itt ugyanis nem technikai szempontból kell megküzdeni azzal, hogy hogyan használjunk egy számítógépet, egy tabletet vagy egy mobileszközt arra, hogy információkat szerezhessünk. Hanem azzal a pedagógiai problémával, hogy – a tanulás kognitív folyamatát megismerve – hogyan lehet a diákok érdek-

lődését felkeltve olyan környezetet teremteni, amelyben a tanulás a digitális eszközök segítségével, de nem kizárólag azok által, a diákok számára az eddigieknél izgalmasabban és hatékonyabban tud megvalósulni.

Ann Dowker elég sokat foglalkozott ezzel a témával, neki van erről egy érdekes elképzelése, ő azt gondolja például, hogy nincs különbség a férfiak és a nők szorongása között, csak a nők érzékenyebbek. Ők már azt a szintjét veszik a szorongásnak, ami még egy férfinak fel sem tűnik. Ez azért problematikus, mert ha a szorongás beindul, az rongálja a munkamemória működését, így aztán a gondolkodás, a feladatmegoldás minősége is romlik. [9, 10]

Van Gogh és a sorozatok a matematika előadáson

A Z-generáció a kutatások szerint 8 percig képes tartós figyelésre. 8 perc után valami mást kellene mutatnunk előadáson. Tapasztalatom, hogy a 90 perces előadásban a gondolatmenetet 3–4 alkalommal kell érdekességgel, telefonos játékkal, humorral megszakítanom. Bruner narratív elméletét alkalmazva, célszerű a megszakításokat tematikusan megtervezni. A sorozatokhoz Van Gogh képeit felhasználva, gyűjtöttem érdekességeket úgy, hogy elég, ha csak szemlélik a látottakat. Úgy fognak emlékezni az előadásra, hogy az az óra volt, amikor Van Gogh-ról beszélgettünk.

Aranymetszés

Az aranymetszés a természetes szépérzékünk aránya, értéke $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$. A festészetben, szobrászatban előszeretettel alkalmazzák a művészek a mondanivaló elhelyezésére.

[9] Barak B.: *Az új, felpörgött generáció felőrli a tanárokat?* https://haon.hu/kozelet/helyi-kozelet/az-uj-felporgott-generacio-felorli-a-tanarokat-3368081/?fbclid=IwAR1POaIcJ-TVB2vJ0ejfM-ZfOqr93DkT15ySoo_qs4IiA5Qp-CN2fUpq8luc [Accessed 2019. június 8.]

[10] Bernáth L. (2018): Miért mumus a matek? – Matematikai szorongásról és tantárgyszorongásról dr. Bernáth Lászlóval, *Modern Iskola*. https://moderniskola.hu/2018/02/miert-mumus-matek-matematikai-szorongasrol-es-tantargyszorongasrol-dr-bernath-laszloval/, [Accessed 2018. február 26.]

1. ábra. Országút ciprussal és csillaggal, Van Gogh [11]

[11] Sunflowers, www.vggallery.com, a képek forrása.

A ciprus törzse mind hosszában, mind szélességében az aranymetszés arányában van. A kép jobb oldalán a lovaskocsi a citrus és a festmény széle között szintén az aranymetszés arányában helyezkedik el.

Fibonacci-sorozat

A Fibonacci-sorozat $f_1 = 1\ f_2 = 1\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ hányados-sorozatának határértéke szintén az aranymetszés aránya

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

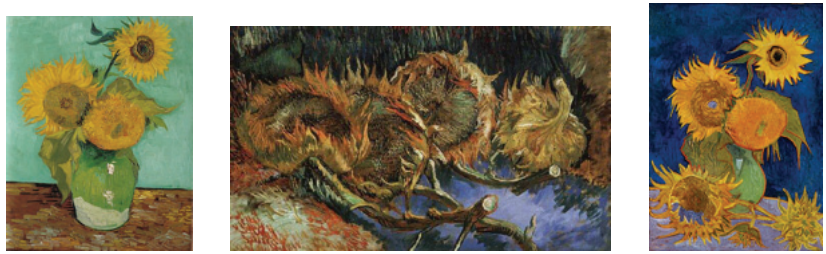
Van Gogh több napraforgó témájú képet is festett. Ezekből is előállíthatjuk a Fibonacci-sorozat első néhány elemét. Ha lenne 13 napraforgós festménye, még egy taggal tudnánk folytatni.

2. ábra. A napraforgós képek alapján a Fibonacci-sorozat néhány első tagja: 1, 1, 2, 3, 5 [12, 11]

Pitagoraszi-számhármasok és négyesek

Az *x, y, z* pozitív egész számokat pitagoraszi számhármasnak nevezzük, ha $x^2+y^2=z^2$. A pitagoraszi számhármasok a következő alakúak: $x=2mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, ahol m, n természetes számok, amelyekre m>n, különböző paritásúak és $(m;n)=1$. [14]

3. ábra. Pitagoraszi számhármas a napraforgós képekből 3; 4; 5 [11]



Az *x, y, z, t* pozitív egész számokat pitagoraszi számnégyesnek nevezzük, ha

$$x^2+y^2+z^2=t^2,$$

ahol *x, y, z, t*-re a következő összefüggések igazak: $x=p^2-q^2-r^2$, $y=2pq$, $z=2pr$, $t=p^2+q^2+r^2$, *p, q, r* egymástól független pozitív egész számok, amelyekre

$$p^2>q^2+r^2.$$ [13]

[11] Sunflowers, www.vggallery.com, a képek forrása.

[12] Kelly Richman–Abdou (2019): *How Van Gogh's Love of Painting Sunflowers Blossomed During His Short Career.* [Acessed 16 June, 2019]

[13] Barak B.: *Az új, felpörgött generáció felőrli a tanárokat?* https://haon.hu/kozelet/helyi-kozelet/az-uj-felporgott-generacio-felorli-a-tanarokat-3368081/?fbclid=IwAR1POaIcJ-TVB2vJ0ejfM-ZfOqr93DkT15ySoo_qs4IiA5QpCN2fUpq8luc [Accessed 2019. június 8.]

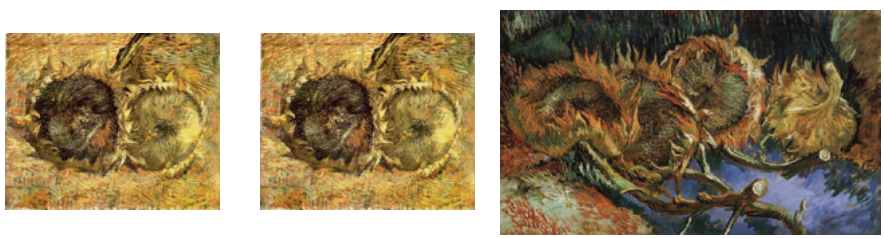
[14] Simonovits A. (2007): *Matematikatörténeti vázlat*. BME, Matematika Intézet, http://docplayer.hu/7557427-Matematikatorteneti-vazlat-bme-matematikai-intezet-e-mail-simonov-econ-core-hu-2007-junius-26.html, [Accessed 2007. június 26.]

4. ábra. Pitagoraszi számnégyes a napraforgós képekkel 2; 2; 1; 3 [11, 12]

Ha lenne 13 napraforgós festménye, még egy számhármast (5; 12; 13) és még egy számnégyest ki tudnánk rakni (3; 12; 4; 13).

Szorzás, hatványozás, érdekes számok

5. ábra. $2^2=4$ napraforgókkal [5]



6. ábra. $4^2=16$ napraforgókkal [4, 5]

[11] Sunflowers, www.vggallery.com, a képek forrása.

[12] Kelly Richman–Abdou (2019): *How Van Gogh's Love of Painting Sunflowers Blossomed During His Short Career.* [Acessed 16 June, 2019]

[11] Sunflowers, www.vggallery.com, a képek forrása.

[15] Karlik Zs. (2009): *A tökéletes számok.* Szakdolgozat, ELTE, 2009. https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mattan/2009/karlik_zsuzsanna.pdf [Acessed 2009]

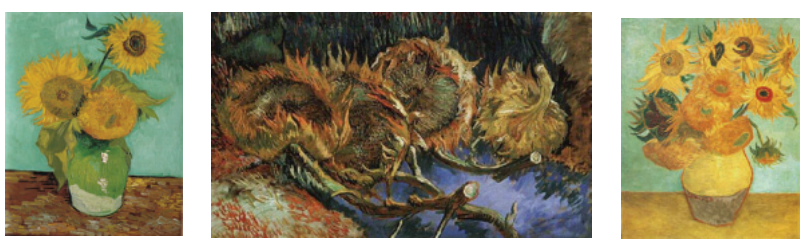
Az n pozitív egész számot majdnem tökéletes számnak nevezzük, ha σ(n) = 2n – 1.
Tétel: A 2-hatványok majdnem tökéletes számok.

Bizonyítás: $\sigma(2k) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2k - 1$

Tehát egyelőre egy páratlan majdnem tökéletes számot ismerünk, a $2^0 = 1$-et, a többi mind páros. [15]

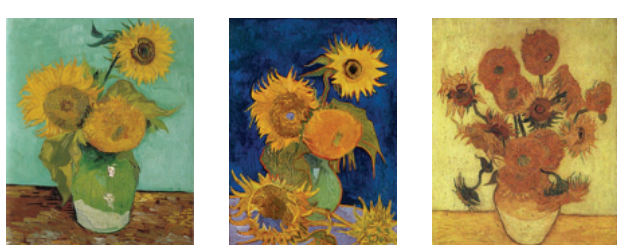
Nem tudjuk, hogy a kettő hatványain kívül vannak-e más majdnem tökéletes számok. De az előzökben mutatott 4 és 16 majdnem tökéletes számok. Például 16-ra σ(16) = 2*16 – 1=31, ugyanakkor σ(16)=1+2+4+8+16=31.
A szorzásra más példát nézünk:

7. ábra. 3*4=12 napraforgókkal [11]



Egy pozitív egész számot bővelkedőnek nevezünk, ha osztóinak összege nagyobb a szám kétszeresénél, azaz σ(n) > 2n. Másképpen megfogalmazva, egy szám bővelkedő, ha a nála kisebb osztóinak összege nagyobb a számnál. A 12 bővelkedő szám, mert a nála kisebb osztóinak összege 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12.

8. ábra. 3*5=15 napraforgókkal [11]

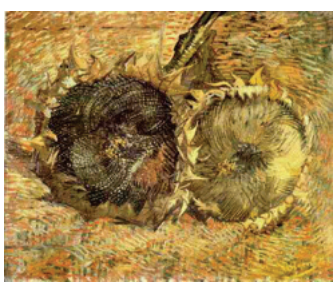


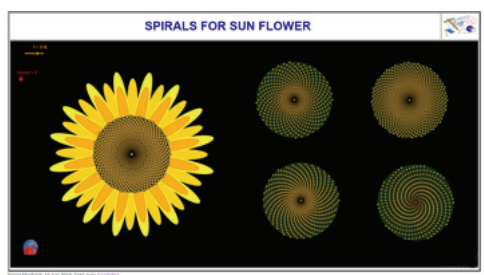
A 15 ikerprímek szorzataként áll elő. Két természetes számot ikerprímnek mondunk, ha prímszámok és a különbségük 2.

Van Gogh és a GeoGebra

A napraforgó szemek a Fibonacci-spirál szerint követik egymást. Van Gogh egyik festményén megfigyelhető, ahogyan matematikai pontossággal próbálta megfesteni a spirált. A spirált GeoGebrában is modellezték.

9. ábra. A napraforgó spiráljairól gyönyörű GeoGebra animáció készült [11, 16]





Loving Vincent

A Loving Vincent a világ első teljes egészében kézzel festett animációs filmje, amelyben minden egyes képkockát (65.000 db!) festőművészek készítettek, olajjal, vászonra, ahogy maga Vincent Van Gogh festette volna. A heroikus vállalkozás, mely 2011-ben kezdődött, az angol Hugh Welchman és felesége, a lengyel Dorota Kobiela filmje, Van Gogh lenyűgöző világában játszódik. Több ezer festményen keresztül elevenednek meg életének legismertebb helyszínei és megfestett figurái, miközben világ egyik legkedveltebb festőjének, Vincent Van Gogh-nak ellentmondásos életét és halálát vizsgálja a film. Kibontakozik az utolsó napok drámája és végre fény derül rejtélyes halálának körülményeire. A filmforgatás után, több mint 100 képzőművész dolgozott egyszerre a közel 6 évig tartó folyamatban, hogy Van Gogh egyedi stílusában láthassuk ezt a lebilincselő történetet.[17]

[11] Sunflowers, www.vggallery.com, a képek forrása.

[16] Mentrand, D. (2014): *Spirals vor sun flower,* Geo Gebra, http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/export4.25/Sunflower.html?fbclid=IwAR2bbBqB8b6b7V_dwOtll92v5BE0bvGDzpZv8BLI3eemcZDmTXLeoyGWFE [Accessed 13 June, 2014]

[17] https://www.youtube.com/watch?v=CGzKnyhYDQI [Accessed 29 August, 2017]

10. ábra. Hogyan készültek a filmkockák? [18]

11. ábra. Jerome Flynn, mint Doctor Gachet [19]

Matematikával egy ókori szépség nyomában

Nofertiti ókori egyiptomi királyné, Ehnaton fáraó főfelesége volt. Férje időszámításunk előtt 1353-tól 1336-ig uralkodott, s leginkább vallási reformjáról ismert, mely során igyekezett bevezetni Egyiptomban az egyistenhitet.

Mivel nem viselte „a király leánya" vagy „a király nővére" címeket, így biztos, hogy nem az egyiptomi királyi családból származott. Nofertiti a feltételezések szerint Ehnaton trónra lépése körül ment feleségül az ifjú fáraóhoz, s annak első számú felesége lett. Királynőként rendkívül fontos szerepet töltött be, már-már társuralkodóként tűnt fel férje mellett, még templomot is szenteltek neki, ahol Ehnaton nincs is jelen a képeken.

[18] O'Falt, C. (2017): *'Loving Vincent': How 125 Artists and 65,000 Paintings Made the World's First Oil-Painted Movie.* https://www.indiewire.com/2017/08/loving-vincent-125-painters-first-hand-oil-painted-animation-1201867696/?fbclid=IwAR1O4yFC_3BvNg_1SWIatfP5JEMmERfWnx88h2htLDFePsE3HPpFdXgV_zs, [Accassed 21 August 2017.]

[19] P. Rodinson: *"Loving Vincent"—How the Ignorati Killed a Masterpiece in Oil… …and once again quashed a medium they fear.* https://medium.com/@Penseur/loving-vincent-how-the-ignorami-killed-a-masterpiece-in-oil-c533c80262d3?fbclid=IwAR1HZxWQ6kXGKHIaKl6BUN9MwjDKFXbmI-

12. ábra. Nofertiti mellszobra [20]

[20] https://24.hu/tudomany/2018/04/08/nofertitit-csabito-mellszobra-okor-szepsegideal/ [Accessed 8 April 2018]

Nofertiti mellszobra mai napig lenyűgöző és nem csak a nő szépsége miatt, hanem a csodálatos munka végett is. Úgy gondoljuk, hogy ez egy tökéletes példa a művészet és a matematika kapcsolatára.

A mellszobrot egy Thotmesz nevű szobrász készítette, aki Ehnaton fáraó uralkodása alatt dolgozott. Az Ehnaton alapította fővárosban élt és dolgozott, majd a műhelyét és raktárát hátra hagyva követte az ifjú Tutanhamont, hiszen a királyi megrendelésektől függött. Ugyan a várost megtámadták és az ottani szobrokat megrongálták, a raktárhelyiség érintetlenül maradt, így megőrizve számos műalkotást az utókornak, köztük Nofertiti mellszobrát is, melyet vélhetően tanulmánynak szánt az alkotó, megkímélve így a királynét attól, hogy folyamatosan modellt üljön a falfestmények készítésekor. Egyes régészek azt mondják, hogy emiatt hiányzik az egyik szeme, hiszen arra nem is volt szükség a képi ábrázolásokhoz.

13. ábra. Nofertiti mosolya

Az arc tökéletesen szimmetrikus, és büszkén tekint előre, de szája sarkában ott lapul az apró mosolyra emlékeztető kis gödröcske. A telt ajkak egyébként felfedezhetők az általános egyiptomi szobrászat arcábrázolásában is. [20]

[20] https://24.hu/tudomany/2018/04/08/nofertitit-csabito-mellszobra-okor-szepsegideal/ [Accessed 8 April 2018]

14. ábra. Nofertiti arcvonásai

A *14. ábrán* látható képen piros háromszöggel igyekszünk felhívni a figyelmet az arányokra, hiszen itt egy egyenlő oldalú háromszöget láthatunk. Az orrát azért is szeretnénk kihangsúlyozni, mert összehasonlítottuk több másik egyiptomi szoboréval és azoknak kecsesebb a lejtése, kisebbek az orrcimpák, de közben ugyanennyire szélesek a legtöbb esetben. Nekünk kifejezetten tetszik, hogy a művész ennyire pontos munkát végzett, hiszen ennél jobban ma sem lehetne szebben kiszerkeszteni a királynő orrát.

Az aranymetszés lehet a titka a tökéletes szépségnek? Eddig is tudtuk, hogy az aranymetszés fontos szerepet játszik abban, hogy mi tetszik nekünk és mi nem, rengeteg művész alkalmazta is a munkáin, de nem számítottunk rá, hogy ez lehet az egyik kulcsa annak, hogy miért övezi akkora rajongás Nofertitit, s miért vált olyan inspirálóvá oly sokak számára. Egy tanulmány szerint a matematikusok megállapították, hogy a „tökéletes" arcon a fül hossza megegyezik az orr hosszával. A *14. ábrán* sárga vonallal jelöltük a képen a próbát és ez a feltevés meglepő mód igaznak bizonyult Nofertiti arcára. Akárcsak az, hogy a két szem közötti résznek pont olyan hosszúnak kell lennie, mint amilyen széles maga a szem. Ezt lilával ábrázoltuk a *15. ábrán.*

15. ábra. Nofertiti tekintete

Emellett még azt is észrevettük, hogy a szemöldöke ívére pontosan ráhelyezhető az aranymetszés görbéje, melyet kék színnel illesztettünk az arcra és a *15. ábrán* láthatjuk. Ez a szemöldökforma egyébként a mai napig közkedvelt stílus. S ha ez nem lenne elég, még egy szabály tökéletesen illik az arcára, melyet szintén kékkel ábrázoltunk, s lentebb látható. Ez szerint az arcot három részre osztjuk (a hajvonaltól a szemig, a szemtől az orr végéig, és az orr végétől az állig), és mindhárom szekció egyenlő. Ugyan a fejdísz miatt nem tudjuk pontosan, hogy hol lehetett a hajvonal, de nagyjából meg lehet állapítani. A harmadik, amit a matematikusok megállapítottak a tökéletes szépség arcáról, hogy az arcnak másfélszer hosszabbnak kell lennie a szélességénél. Ez megint csak egy olyan dolog, amit nem könnyű megállapítani a fejdísz miatt. Pontosan meddig tart az arc? És melyik részt vegyük szélességnek? Ha úgy nézzük a méreteket, mint ahogyan mi jelöltük, akkor nagyjából a fejdísz arany díszítésével egy vonalban kell végződnie az arc szélessége másfélszeresének (*16. ábra*).

16. ábra. Nofertiti arcának arányai és a logaritmikus spirál

Az aranymetszéshez még egy képet szeretnénk megmutatni, melyet viszont már készen találtunk, s úgy gondoltuk, hogy ez megint csak említésre méltó, hiszen csodálatos, ahogy az arány végigfut az egész szobron.

Összegzés

Néhány olyan példát gyűjtöttem össze, amelyeket felvillantásszerűen meg lehet mutatni előadáson. A Nofertitiről szóló részt már mutattam hallgatóimnak, nagy tetszést váltott ki az elemzés, főleg, hogy a hozzáfűződő narratívum kapcsolódik a lányomhoz is. Ha tematikusan, a témához kapcsolódóan látnak példákat diákjaink, lehet, hogy könnyebben előhívják az előadáson hallottakat is. Fontos, hogy vizuális példa is legyen és esetleg valami új ismeret, vagy alkalmazás a mindennapi gyakorlatból. Vizsgán előfordult már, hogy úgy jutott eszébe a hallgatónak a megoldási módszer, hogy a „mellékes dolog"-ra emlékezett először, aztán a tanult sémára. A számítógépes animációkat is kedvelik, az okostelefonos játékok is élményszerűvé teszik a tanulást.

KOVÁCS MÁRK *–AGG PÉTER ANDRÁS **–JOHANYÁK ZSOLT CSABA ***

Ötödik generációs mobilhálózatok forgalomirányítása és forgalomelosztása SDN és SDR használatával

Összefoglalás: A jelenlegi leggyorsabb negyedik generációs mobil hálózatok megjelenésével jelentősen megnőtt az okos készülékek száma, és ez számottevő igényt generált a webes tartalmak minőségi és gyors elérésére. A 4G további fejlesztésre szorult, ennek kapcsán jött létre a jelenleg is használt LTE-Advanced, amely a hozzáadott antennák számával erősítette a hálózat stabilabb működését. Ellenben ez a megoldás sem a legjobb, ezért szükség van a következő generációs hálózat kifejlesztésére és kialakítására, az 5G-re. Az új technológiához viszont kulcsfontosságú a jól megtervezett forgalomirányítás, forgalomelosztás. Erre egy megoldást adhat a vezetékes hálózatoknál is alkalmazott szoftveren definiált hálózat (Software Defined Networking – SDN), ami lehetővé teszi, hogy az egyes fizikai kapcsolókat és forgalomirányítókat ne kelljen külön egyesével konfigurálni, hanem egy központosított vezérlővel tudjuk működtetni a hálózatunk minden egyes elemét az aktuális forgalom alapján. Cikkünk az 5G és az SDN, illetve a szoftveresen definiált rádió (Software Defined Radio – SDR) közötti kapcsolatot mutatja be.
Kulcsszavak: 5G; forgalomirányítás; forgalomelosztás; SDN; SDR.

Abstract: With the advent of today's fastest fourth generation mobile networks, the number of smart devices has increased significantly, creating a significant demand for high quality and fast access to web content. 4G needed further development, resulting in the LTE-Advanced, currently in use, which added more antennas to enhance the stability of the network. However, this solution is not the best, so we need to develop and build the next generation network, 5G. However, well-designed traffic management and traffic distribution are key to the new technology. One solution to this is Software Defined Networking (SDN), which allows you to configure each physical switch and router separately and operate each element of your network with

*Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar
E-mail: kovacs.mark@gamf.uni-neumann.hu

**Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar
E-mail: agg.peter@gamf.uni-neumann.hu

***Neumann János Egyetem GAMF Műszaki és Informatikai Kar
E-mail: johanyak.csaba@gamf.uni-neumann.hu

a centralized controller which based on the actual traffic. This article describes the relationship between 5G and SDN and Software Defined Radio (SDR).
Keywords: 5G; routing; traffic distribution; SDN; SDR.

Bevezetés

Számítógépes hálózatok használata szinte kikerülhetetlen a mai világban. Az élet minden területén megjelennek mind a vezetékes, mind a vezeték nélküli hálózatok, melyek segítségével számítógépeink, okos eszközeink kommunikálhatnak egymással. A 4. generációs mobilhálózatok megjelenése, majd azok továbbfejlesztése nagy előrelépést jelentett a vezeték nélküli eszközök fejlesztésében és elterjedésében is. A jelenleg használt technológiának köszönhetően már több mobiltelefon van használatban, mint a Föld teljes lakossága, és ez a szám várhatóan exponenciálisan tovább nő a jövőben is. Ehhez a számhoz még hozzáadódik az Internet of Things (IoT), azaz az a „dolgok internete", ami hasonlóképpen nem elhanyagolható eszközszámot jelent.

Az egyre többet használt mobil eszközök miatt a jelenleg használt LTE-A technológia a közeljövőben további fejlesztésre szorul, meg kell találni a módját, hogy a lehető legkisebb válaszidő mellet a legjobb sávszélességet nyújtsák az eszközök kommunikációjához. Erre a vezetékes hálózatokban már alkalmazott SDN-hez hasonlóan az SDR alkalmazása adhat megoldást az ötödik generációs hálózatokban.

SDN- és SDR-technológiák

SDN

Napjaink egyik legelterjedtebb hálózati megoldása a Szoftver által definiált hálózatok (Software Defined Networks, SDN)[1, 2]. A hagyományos hálózatokkal ellentétben az SDN szétválasztja a vezérlős síkot (control plane) az adatsíktól (data plane), így hatékonyabban megvalósítást tesz lehetővé a központosított vezérlés terén. Az SDN hálózatoknál három fő réteget különítünk el. Ezek az: adatsík, vezérlősík, és az alkalmazási sík.

[1] Kreutz, D.–Ramos, F. M. V. –Verissimo, P.: Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey, *Proceedings of the IEEE.* Vol. 103. Issue: 1 , Jan. 2015, Pp. 14–76. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2371999

[2] Ramos, F. M. V.–Kreutz, D.–Verissimo, P.: Software-defined networks: On the road to the softwarization of networking, *Cutter IT Journal.* 2015. DOI: 10.5281/zenodo.55258

Adatsík

Az adatsíkban található hálózati infrastruktúra gyakorlatilag megegyezik a hagyományos hálózatnál használt fizikai eszközökkel, azzal a különbséggel, hogy ezek az SDN-kapcsolók (forgalomirányítók és kapcsolók együttes neve) OpenFlow [3] protokoll kompatibilisek kell legyenek. Feladatuk csak annyi, hogy a vezérlő síktól kapott utasításoknak megfelelően eljuttassák a csomagokat végponttól végpontig. A vezérlő síkkal az úgynevezett déli interfészen (Southbound Interface) keresztül tudnak kommunikálni.

Vezérlősík

A vezérlő síkban található virtualizáció az egyik legfontosabb és legmeghatározóbb réteg, amely az itt használt programok segítségével biztosítja a hálózat automatikus konfigurálását, és lehetővé teszi a dinamikus hozzáférést, vezérlést. A központosított irányítás során felmerülő esetleges hálózatmenedzsment problémák megoldására az itt működő hálózati operációs rendszer (Network Operating System) használható. A vezérlő sík közvetlen kapcsolatban van az úgynevezett alkalmazási síkkal az északi interfészen (Northbound Interface) keresztül.

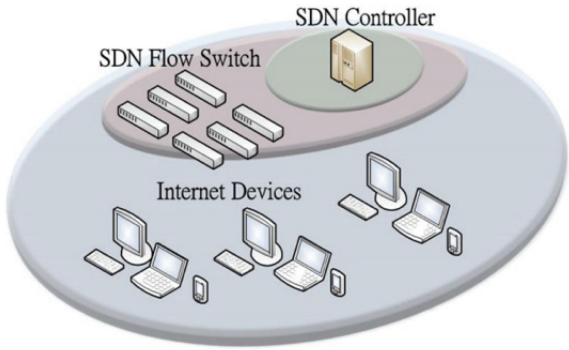
Alkalmazási sík

Az alkalmazási rétegben a menedzsment eszközök helyezkednek el, melyeknek a feladatuk a megfelelő utasítások kiadása a vezérlés felé. Ebben a síkban három alréteg található, ezek a nyelvalapú virtualizáció (Language-based virtualization), a programozási nyelvek (Programming language) és a hálózati alkalmazások (Network Applications). Az alrétegek biztosítják a gyors adatkommunikácót központi felügyelet mellett, valamint az adatok biztonságos áramlását, úgy, hogy a problémaorientáltságra fókuszálnak.

[3] Lara, A.–Kolasani, A.–Ramamurthy, B. (2014): "Network innovation using OpenFlow: A survey," *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 16(1). Pp. 493–512.

[4] Cho, H.-H.–Lai, C.-F.–Shih, T. K.–Chao, H.-C. (2014): *Integration of SDR and SDN for 5G.* IEEE Access, Vol. 2, 2014, pp. 1196-1204, DOI: 10.1109/ACCESS.2014.2357435

1. ábra. SDN felépítése [4]



SDR

Többféle vezeték nélküli rádiófrekvenciás kapcsolat létezik, ami nem túl hatékony megoldás, mert ha egyikből a másikba kell továbbítani adatokat, ahhoz különféle eszközök kellenek a kompatibilitási problémák miatt. Ilyenek például a szűrők, modulátorok, demodulátorok és különféle átalakítók, melyek sok esetben túl költségesek. Azonban, ha ezeket a különböző technológiákat egy közös rendszerbe foglalnánk, akkor könnyebben át lehetne hidalni ezeket a problémákat. Gondolva itt a WiMax, WiFi, GSM vagy az LTE különböző frekvenciasávokon működő jeleire.

A szoftver által definiált rádió (Software Defined Radio – SDR) egy vezeték nélküli kommunikációs rendszer, ahol a komponensek nem hardveres eszközként vannak jelen, mint például a modulátorok vagy szűrők és erősítők, hanem egy szoftverbe vannak implementálva. Az 5G hálózatban az alap koncepció az, hogy a forgalmat a frekvenciasávok között egységesen el kell osztani, és újra fel kell használni a már nem használt spektrumokat, a forgalmi torlódás elkerülése érdekében. Ezt a forgalomelosztást szoftveresen érdemes megoldani.

SDN és SDR összekapcsolása

A két technológia összekötésének az a várható előnye, hogy a tábbiakban nem kell szinte teljesen külön kezelni a vezetékes és vezeték nélküli hálózatok forgalomelosztását.

SDR réteg

Egy külön rétegben helyezkednének el a vezeték nélküli rádiós hálózatra kapcsolódó mobil eszközök. Az ötödik generációs hálózati mobil eszközök képesek lesznek használni a Universal Software Radio Peripheral (USRP) technológiát, amivel megvizsgálják, hogy a spektrum mennyire van kihasználva. Természetesen nem a mobil eszköz fog egyedül dönteni az optimális csatlakozásról, hanem egy döntéshozó adminisztrációs vezérlő végzi el a feladatot.

SDN réteg

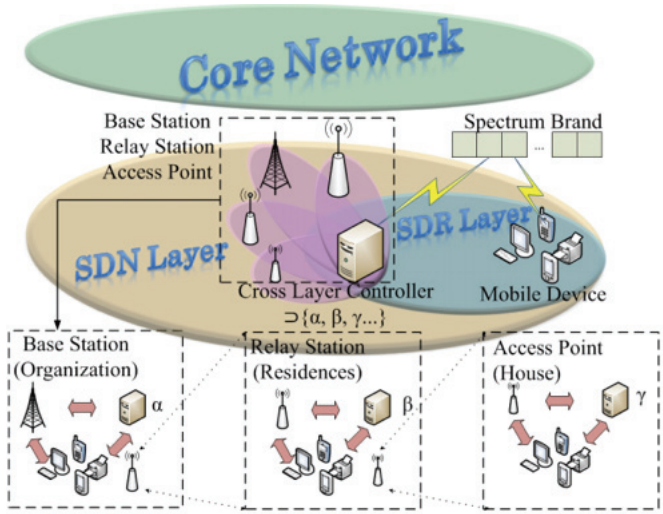
Az SDN réteg feladata a teljes küldendő és bejövő csomagok kezelése, mind vezetékes vagy rádiós kapcsolattal. A fő feladata, hogy a WiMAX, LTE és a 802.11 szabványokat az 5G kommunikációban kezelje és továbbítsa a vezérlő felé.

Cross Layer Controller

Egy központi vezérlő foglalja egybe a két réteget és szinte ez a legfontosabb eleme a rendszernek, hiszen a két rétegtől összegyűjtött információk alapján osztja ki az elérhetőséget minden egyes hálózatra csatlakozó mobil eszköznek. A központi egység meg tudja határozni minden hálózati eszköz helyzetét a hálózatban, és a legkevésbé használt csatornát osztja ki számára a forgalmi torlódások elkerülése érdekében.

[1] Kreutz, D.–Ramos, F.M.V. –Verissimo, P.: Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey, *Proceedings of the IEEE.* Vol. 103. Issue: 1 , Jan. 2015, Pp. 14–76. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2371999

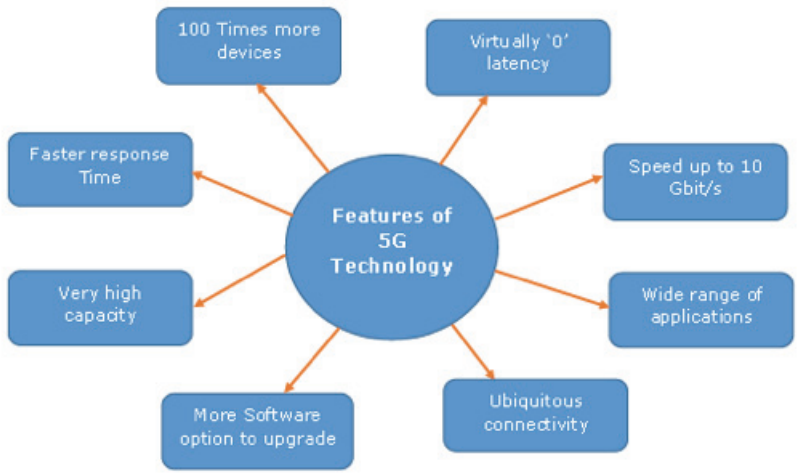
2. ábra. SDN és SDR hibrid technológiája [1]



Ötödik generációs mobil hálózatok

A negyedik generációs vezeték nélküli mobilhálózat megjelenésének köszönhetően már az átlag okostelefon-használók is egyre többet használják az internetet, azonban ehhez olyan megbízható adatkapcsolatot várnak, amivel a nagyobb felbontású tartalmakat is megtudják tekinteni. Az exponenciálisan növekvő mobil eszközszám és adatforgalom miatt a jelenlegi hálózatot tovább kell fejleszteni.

3. ábra. 5G újításai



A következő generációtól szembeni elvárás a nagy adatátviteli sebesség, ami az átlag 10 Gbit/s-t jelenti, de a minimum követelmény az 1 Gbit/s sebességet mindenhol meghaladja. A másik fő szempont a latency (válaszidő) 1 ms alá szorítása, ami nagy előrelépést jelentene. A jelenlegi technológia előreláthatóan nem fogja elbírni a rohamosan növekvő mobil eszközök számát, hiszen az elkövetkezendő néhány évben az aktuális szám többszörösére növekszik.

Milliméteres hullámok

A jelenlegi hálózati eszközök olyan frekvencián működnek, amely kezd már túl zajossá válni, ami akadályozza a megfelelő minőségű jel továbbítását. Egy lehetséges megoldás erre a problémára a magasabb frekvenciatartományok használata. Ezek eddig még nem voltak használatban, tehát nincs bennük zavaró jel. Ezek a frekvencia tartományok egészen 300 GHz-ig is terjedhetnek. Hátrányuk azonban, hogy a hullámok nem képesek nagyobb akadályokon áthatolni, ezért kisebb a hatótávuk.

Kis cellák, masszív MIMO

Az akadályok okozta hatótávolság romlása miatt bevezetik a kis cellákból felépülő rendszert, ami annyit jelent, hogy a bázisállomás köré egymáshoz csupán pár száz méterre elhelyeznek kisebb jeltovábbító antennákat, melyek segítségével egy akadály (például fa, épület) könnyen kikerülhetővé válik.
Annak érdekében, hogy a bázisállomások egyszerre több eszközzel és több ponton tudjanak csatlakozni a jelenleg is alkalmazott MIMO-technológia továbbfejlesztése szükséges. A Massive MIMO többszörös kis cellák tömbjéből álló, akár 8x8-as vagy 16x16-as tömböket alkotó állomásokat jelent.

BDMA

Az 5G hálózatokban nagy valószínűséggel a Beam Division Multiple Access (BDMA) technológiát. Az antennaállomások bemérik, hogy hol van az aktuális eszköz, és egy külön nyaláb segítségével közvetlen kapcsolatot teremtenek vele. Ha mozgásban van az eszköz, például járműben használják, akkor képes kell legyen átkapcsolni egyik antennasugárzásból a másik legjobb jelerősségű sugárzásba. Ezt a technológiát szokás beamforming-nak, azaz nyalábformálásnak is nevezni.

Összefoglalás

Az ötödik generáció kidolgozása és tesztelése már Magyarországon is folyik, a legfrissebb tesztelés Győrben a Telenor közreműködésével zajlik, amit az egyetem összes hallgatója tesztelhet. 3600 MHz frekvencián és 100 MHz frekvenciasávon üzemel, 1,7 Gbps letöltési sebességgel, ami megfelel az új generáció kritériumának. A nagy letöltési sebesség elterjedésével még jobban megemelkedhet a mobil eszközök használata, amihez már szükséges egy jól megtervezett döntéshozó vezérlő, mint az SDR, SDN technológiák használata.

Köszönetnyilvánítás
Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

NAGY PÉTER *–TASNÁDI PÉTER **

Rugósinga dinamikai vizsgálata – egy fizika versenyfeladat kaotikus utóélete

Összefoglalás: Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának egyik fizika feladatáról az OKTV bizottság csak a versenyzők dolgozatainak javítása közben vette észre, hogy a feladat általánosan nem megoldható! A feladatban megfogalmazott (ma rugósinga néven ismert) modell kaotikus tulajdonságait Gruiz Márton vizsgálta elsőként a Fizikai Szemlében 2006-ban megjelent cikkében. Jelen dolgozatunkban a rugósinga szisztematikus tanulmányozását végezzük el egy a dinamikai rendszerek vizsgálatára kifejlesztett roppant praktikus eszköz a Dynamics Solver (DS) segítségével. Célkitűzésünk kettős: egyfelől a modell kaotikus tulajdonságainak tudományos igényű tárgyalása, másfelől a DS sokrétű használhatóságának bemutatása (a szimulációs fájlok letölthetők a honlapunkról). Az eredeti konzervatív rendszer kaotikus viselkedésének tárgyalása után a modellt kiterjesztjük disszipatív esetre is (periodikus külső gerjesztést és súrlódást illesztve a modellbe), illusztráljuk a tranziens káosz jelenségét, amely napjainkban talán a káoszelmélet legintenzívebben kutatott területe.
Kulcsszavak: Rugósinga; permanens káosz; tranziens káosz.

Abstract: The Competition Comitte of the National Secondary School Physics Competition in 1965 had perceived only during the evaluation of the competition tests that one problem of the second round of the Competition cannot be solved generally. The problem referred to a spring pendulum the chaotic properties of which were discussed firstly by Márton Gruiz in 2006. In the present paper the motion of the spring pendulum is investigated systematically by the Dynamic Solver (DS), which is a very practical tool developed for studying dynamic systems. The aim of the study is double, on one hand it is the description of the motion of the spring pendulum at detailed scientific level, on the other hand the demonstration of the versatile usabil-

*Neumann János Egyetem, GAMF Műszaki és Informatikai Kar
E-mail: nagy.peter@gamf.uni-neumann.hu

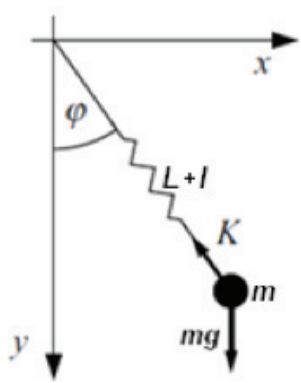
*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
E-mail: ttasipeter@gmail.com

ity of the DS. After presenting the detailed investigation of chaotic behaviour in the phase-space of the conservative system of the original problem the model will be extended to dissipative cases with applying periodic driving force and taking into account friction force. The transient chaos which is a current topic of the chaos researches will be also discussed.
Keywords: Spring pendulum; permanent chaos; transient chaos.

Bevezetés

Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának egyik fizika feladata a következőképpen szólt:
„Felfüggesztett L (nyugalmi) hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugóra kisméretű testet akasztunk. A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó akkor nyújtatlan állapotban van, hossza L) és elengedjük. Ismeretes a rugó D állandója, amely szerint a rugalmas erő arányos az x megnyúlással: F=-Dx . Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?"

1. ábra. A rugós inga



Az OKTV bizottság csak a versenyzők dolgozatainak javítása közben vette észre, hogy a feladat általánosan nem megoldható. A probléma forrása az volt, hogy a feladat paraméteres megfogalmazású és a test mozgása bizonyos paraméterértékeknél furcsa véletlenszerű, előrejelezhetetlen jelleget mutatott. Egy ilyen roppant egyszerű mechanikai rendszerben ez merőben meglepő viselkedésnek tűnt. Ma visszatekintve a történtekre jól értjük a jelenséget, de akkoriban még éppen megszületőben volt a káoszelmélet: E. Lorenz

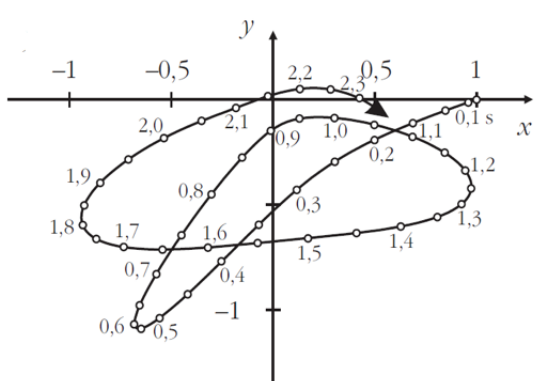
1963 közölte forradalmi (Deterministic Nonperiodic Flow című) cikkét (életet lehelve H. Poincaré elfeledett gondolataiba) és nagyjából két évtized kellett a káoszelmélet fogalmi és módszertani alapjainak lerakásához.

Cikkünkben részletesen tárgyaljuk a napjainkban rugósinga néven ismert fenti mechanikai rendszer kaotikus viselkedését egy nagyon felhasználóbarát szoftver segítségével, majd a modell kiterjesztésével még izgalmasabb kaotikus tulajdonságokat illusztrálunk. A tárgyalásban megjelenő számítógépes anyagok (ZIP fájlba csomagolva) letölthetők a honlapunkról [1].

Elméleti háttér, módszertani alapok

Vermes Miklós a fizika OKTV elnöke vélhetően megsejtette, hogy valami izgalmas dologra világított rá a feladat. Rengeteg időt áldozva előbb kézzel papíron számolt ki fáradtságos numerikus munkával néhány lehetséges pályát, majd az akkor Magyarországon elérhető legmodernebb számítógép, az Ural II. segítségét vette igénybe a pontosabb kalkulációhoz. Például az $m = 0,034$ kg, $D = 2\ \mathrm{N/m}$, $L = 0,5$ m paraméterértékek esetén a $l_0 = 1$ m, $\varphi = \pi/2$ kezdeti feltételekhez 2,3 s időtartamú mozgáshoz kiszámolt pálya a *2. ábrán* látható [2].

2. ábra. Vermes Miklós által számított pálya 2,3 másodpercig



[1] http://csodafizika.hu/rugosinga.zip

[2] Gruiz Márton (2006): A rugalmas fonalú ingáról – mai szemmel. *Fizikai Szemle*. 2006/10. Pp. 337–343.

[2] Gruiz Márton (2006): A rugalmas fonalú ingáról – mai szemmel. *Fizikai Szemle*. 2006/10. Pp. 337–343.

A különböző paraméterértékekhez és kezdeti feltételekhez kiszámított pályák semmilyen szabályszerűséget sem mutattak, bonyolult, véletlenszerűnek tűnő mozgásformák jelentek meg. Ma már tudjuk, hogy egy kaotikus rendszer jellegzetes viselkedése mutatkozott meg. A feladat által megfogalmazott modell kaotikus tulajdonságait nagyszerű (és tragikusan korán elhunyt) kollégánk Gruiz Márton tárgyalta behatóan a Fizikai Szemlében [2], jelen tanulmányunkkal az ő emlékének is szeretnénk tisztelegni.

A káosz jelenségének lényegi vonásai az alábbiakban foglalhatók össze:

– egyszerű (kis szabadsági fokú), egyértelmű (determinisztikus) törvényszerűségekkel (azaz néhány nemlineáris dinamikai egyenlettel) leírható rendszer időbeli változása (mozgása),
– szabálytalan (nem-periodikus, bonyolult) viselkedés,
– a kiindulási állapot hibájának rohamos növekedése (a kezdeti feltételekre való extrém érzékenység) következtében a gyakorlatban hosszú időtartamra előrejelezhetetlen, csak valószínűségi leírás adható,
– az időbeli változást teljesen megadó fázistérben a hosszú távú viselkedést egyfajta struktúra, rend jellemezi, a fázistérbeli kép (leképezés) fraktálgeometriát mutat.

Valamely dinamikai rendszer egy időpillanatbeli állapotának egyértelmű megadásához szükséges (minimális számú) $\bar{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ változók által kifeszített n dimenziós absztrakt *fázistér*.

A rendszer időfejlődését változóinak $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ elsőrendű differenciálegyenlet rendszerével (esetleg új változók bevezetésével) adjuk meg:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}.$$

A fázistér vonzó halmazát, amely felé a trajektóriák közelednek *attraktor*nak nevezzük:

– egyszerű attraktor: szabályos mozgásokhoz tartozó attraktorok, fixpont attraktor, vagy határciklus attraktor,
– különös (kaotikus) attraktor: szabálytalan (kaotikus) mozgást végző rendszer fraktál geometriájú attraktora.

Permanens káosz esetén a rendszer fázispontja soha nem hagyja el az attraktort, míg *tranziens* káosznál a trajektória csak véges ideig marad a kaotikus attraktor közelében.

Poincaré térkép (-leképezés): a trajektóriának csak egy kiválasztott felületet átdöfő (egy adott altérbe eső) metszéspontjait ábrázoljuk, melyek diszkrét pontsorozatot alkotnak. A gerjesztett rendszerek esetén használt ún. *stroboszkópikus* leképezés egy speciális Poincaré-leképezés, amely a trajektória gerjesztési periódusidőnként (azaz állandó fázisértékeknél) vett mintájaként kapott pontsorozat.

A fenti (csatolt) nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert csak a legritkább esetben lehet „kézzel" analitikusan megoldani, tehát numerikus módszerekkel, számítógép segítségével végezzük a vizsgálatokat, ezért a káoszelmélet a számítógépes kísérleti fizika egyik legfontosabb területe. Ez azonban alapvetően programozói kompetenciákat tételez fel, ami sokak számára nem kis kihívás. Éppen ezért tartjuk nagyon kiemelendőnek és ajánljuk oktatási és kutatási célra egyaránt a *Dynamics Solver* programot [3], amely szabadon letölthető és tetszőleges dinamikai rendszerek szimulációjára alkalmas, roppant felhasználóbarát és nem szükséges programozói tudás a használatához (a programhoz nagyon részletes angol nyelvű leírás tartozik, de a letölthető anyagaink között található egy általunk készített tömör leírás is). A továbbiakban a Dynamics Solver (DS) programmal dolgozunk. Egy már kész **.ds probléma-fájl* legalapvetőbb szintű használathoz szükséges funkciók: a futtatás a ikonnal, a megállítás a ikonnal, a folytatás a ikonnal, a grafikus ablakok törlése (akár futás közben is!) a ikonnal, a paraméter-tábla megjelenítése a ikonnal, a kezdetifeltétel-tábla megjelenítése pedig a ikonnal történik.

A konzervatív rugósinga

Az OKTV-feladatban megfogalmazott egyszerű mechanikai rendszer négy dinamikai változója az l megnyúlás, a φ (kitérési) szög, illetve ezek időderiváltjai a v hosszváltozási sebesség és az ω szögsebesség, a (dimenziótlan) mozgásegyenletek pedig (a levezetés a Függelékben):

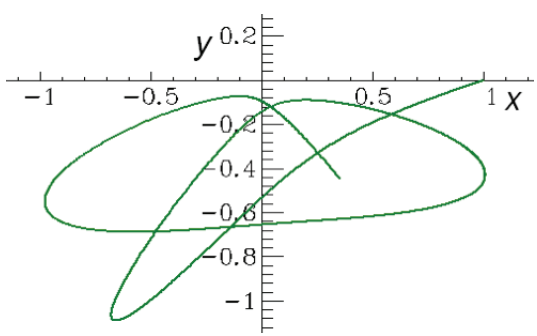
[3] http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = l\omega^2 - (l-1) + A \cdot \cos\varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{-2v\omega - A \cdot \sin\varphi}{l} \end{cases},$$

ahol $A = \dfrac{g \cdot m}{L \cdot D}$ (dimenziótlan) paraméter.

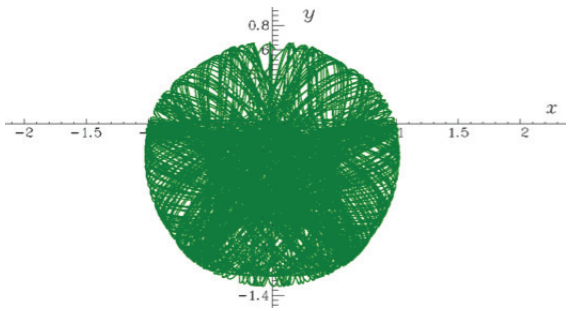
A DS segítségével könnyedén szimulálhatjuk a rugósinga végén levő test mozgásának pályáját (rugosinga_mozgas_palya.ds). (Megjegyzés: a programban a v változó helyett gamma jelölést használjuk.). Tekintsük példaként a Vermes Miklós által választott fenti $m = 0{,}034\ \text{kg},\ D = 2\ \text{N/m},\ L = 0{,}5\ \text{m}$ paraméterértékeket, ekkor $A = 0{,}33354$ $\left(g = 9{,}81\ \text{m/s}^2\right)$ és 2,3 másodperces mozgásra a *3. ábrán* látható pályát kapjuk.

3. ábra. A Dynamics Solverrel számított pálya 2,3 másodpercig



A *2. és 3. ábrát* összevetve láthatjuk, hogy kb. 2,1 másodpercig a két pályagörbe azonos, utána viszont eltérő módon folytatódnak. Ennek oka a Vermes Miklós által használt nem kielégítően pontos numerikus számítás kumulatív hibája, azaz hosszabb időtartamra már megbízhatatlan eredményt kapott. A DS numerikus pontossága lehetővé teszi, hogy sokkal nagyobb időtartamon is szimulálhassuk a test mozgásának pályáját, amely kétség kívül teljesen szabálytalan, kaotikus jelleget mutat (*4. ábra)*.

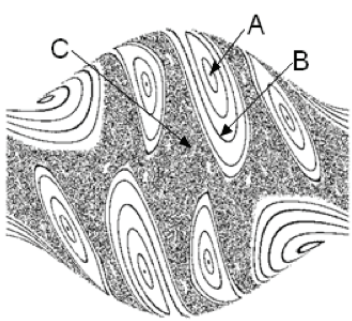
4. ábra. 300 másodperc (2300 dimenziótlan időegység) alatt befutott pálya



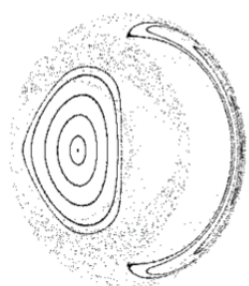
A rugósinga tehát egyértelműen teljesíti a káosz fentebb felsorolt alapvető vonásainak első két pontját, a harmadik pontban megfogalmazott tulajdonságot majd a következő fejezetben szemléltetjük. Térjünk most rá a negyedik lényegi aspektusra és vizsgáljuk a modellünk hosszú távú viselkedését a fázistérben. Mivel a fázisterünk 4 dimenziós, ezért a kétdimenziós képernyőn való megjelenítéshez a fentebb leírt Poincaré-térképet használjuk (*rugosinga_Poincare.ds*).

5. ábra. a rugósinga Poincaré-térképei

(a) fázissík



(b) fázissík

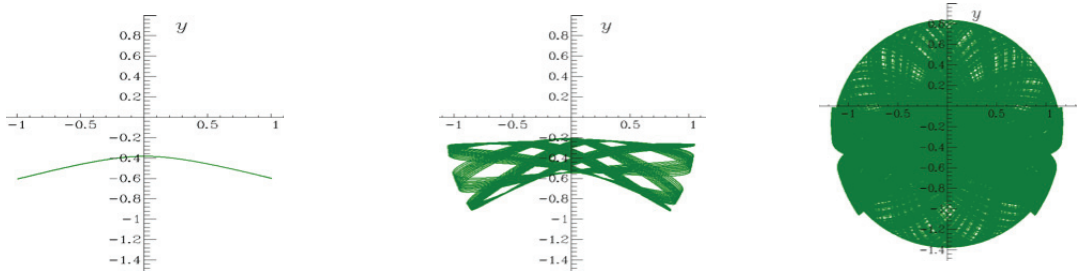


A rugósinga-modell konzervatív rendszert reprezentál, mivel a (kinetikus és potenciális energiák összegével képzett teljes mechanikai) energia megmaradó értékű a mozgás során (lásd részletesebben a Függelékben). A konzervatív rendszerek fázistérfogat-összehúzódási rátája definíció szerint zérus, így a

fázistérnek nem lehet olyan részhalmaza, melyre hosszú időtartamon a trajektóriák ráhúzódhatnának. A konzervatív rendszerekben tehát nem létezhetnek attraktorok, a mozgás nem felejti el kezdőfeltételét, ezért a mozgás jellege még hosszú idő után is függ a kezdőfeltételtől, tehát konzervatív esetben a Poincaré-térképek úgy készülnek, hogy (azonos paraméterértékek mellett) igen sok különböző kezdeti feltételből futtatjuk a szimulációt (*5. ábra*). A káosz olyan módon jelentkezik, hogy bizonyos kezdőfeltételekhez kaotikus, másokhoz ugyanakkor szabályos mozgás tartozik: az ún. *kövér fraktál* geometriájú kaotikus tengerben (pl. **C**) egymásba ágyazódott (kváziperiodikus mozgásoknak megfelelő) zárt görbék által (pl. **B**) reprezentált reguláris szigeteket találunk, amelyek közepén egy periodikus mozgást jelentő pont van (pl. **A**). Az *5. ábrán* jelölt három ponttal jelölt kezdeti értékekhez tartozó mozgások trajektóriáit a *6. ábrán* szemlélhetjük.

6. ábra. Az 5. ábra Poincaré-térképének egyes pontjaihoz tartozó trajektóriák

A: periodikus mozgás ***B: kváziperiodikus mozgás*** ***C: kaotikus mozgás***



Rángatott rugósinga

Az OKTV-feladatban megfogalmazott modell nem kellően realisztikus, mivel hiányzik belőle a valóság két fontos eleme: a mozgást akadályozó súrlódás és a környezeti hatások. Érdemes tehát a fenti rugósinga modellünket e két effektus számbavételével kiterjeszteni. A súrlódást illesszük be a mozgó test sebességével arányos viszkózus erőként, a környezeti gerjesztést pedig a rugósinga felfüggesztési pontjának periodikus „rángatásával", jelen tárgyalásunkban függőleges mozgatással („jojó"). Ekkor a kiterjesztett „rángatott rugósinga" modellünk mozgásegyenletei (lásd a Függelékben):

$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = -2\pi R \cdot \cos\Theta \cdot \cos\varphi + (l+1)\cdot\omega^2 + G\cdot(\cos\varphi - 1) - K\cdot l - C\cdot v - C\cdot R\cdot\sin\Theta\cdot\cos\varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = -G\cdot\dfrac{\sin\varphi}{l+1} + 2\pi R\dfrac{\cos\Theta\cdot\sin\varphi}{l+1} - \dfrac{2v\omega}{l+1} - C\cdot\omega + C\cdot R\dfrac{\sin\Theta\cdot\sin\varphi}{l+1} \\ \dot{\Theta} = 2\pi \end{cases},$$

ahol $G = \dfrac{gT^2}{L};\ C = \dfrac{cT}{m};\ K = \dfrac{DT^2}{m};\ R = 2\pi\dfrac{A}{L}$ dimenziótlan paraméterek.

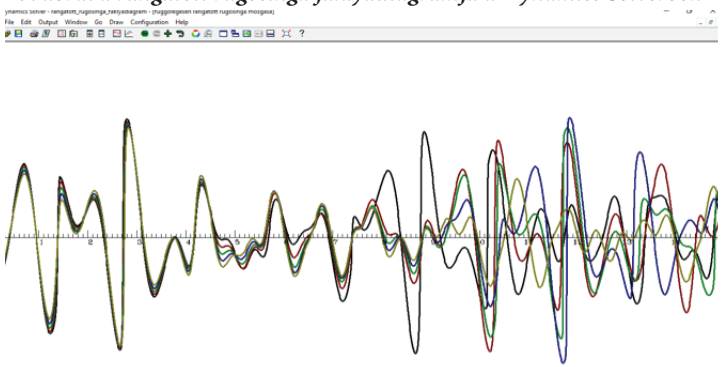
Érdemes kiemelni, hogy a mozgásegyenletek dimenziótlanítása nem csupán gyakorlati jelentőségű (a számítógéppel végzett numerikus algoritmusok csak számokkal dolgoznak, nem tudnak mértékegységeket kezelni!), hanem egy nagyon mély tudományos gondolatra is rávilágít. A dimenziótlan mozgásegyenletekben ugyanis az „eredeti" 7 fizikai (mértékegységes) paraméterből (g, *m, L, D, c, A* és *T)* csupán 4 mértékegység nélküli paraméter jelenik meg. Ez kiemeli a látszólag különböző rendszerek közötti analógiát: minden olyan rendszer időfejlődése ekvivalens (izomorf), amelyek 4 dimenziótlan paramétere azonos, akármennyire is eltérő a 7 fizikai paraméter.

H. Poincaré szavaival: „A matematikai szellem tanít meg bennünket arra, hogy felismerjük az igazi, mély analógiát, melyet a szem nem lát, csak az ész sejt. A matematikai nyelv nélkül a dolgok belső analógiájának legnagyobb része ismeretlen maradt volna előttünk örökre."

A cikk korlátozott terjedelme miatt csak nagyon rövid áttekintést adunk a modell kaotikus viselkedéséről. Futtassuk a *rangatott_rugosinga_mozgas.ds* probléma-fájlt. Azt tapasztaljuk, hogy különböző paraméterértékeknél és kezdőfeltételeknél (!) gyökeresen eltérő jellegű mozgás jelenik meg. Az alapbeállításnál {C = 0,1; K = 15; G = 0,8 és R = 3} paraméterértékeknél és {l_0 = 0,05; φ_0 = 0; v_0 = 0 és w_0 = 0,15} kezdőfeltételeknél a már ismert *permanens káoszt* láthatjuk (azaz a kaotikus viselkedés tetszőleges ideig fennmarad).

A DS segítségével egyszerűen tanulmányozhatjuk a káosz következő lényegi vonását is: a kaotikus rendszer időbeli viselkedésének a kezdeti feltételekre mutatott extrém érzékenységét. Ez azt jeleni, hogy a rendszert (ugyanazon paraméterértékek mellett) nagyon közeli kezdőfeltételekből indítva nagyon eltérő időfüggést tapasztalunk, azaz távolról sem teljesül az általában megszokott „kis kezdeti hiba, kis eredménybeli eltérés"-elv. Ezen extrém érzékenység legszemléletesebb illusztrálási módja az. ún. *fáklya-diagram* készítése.

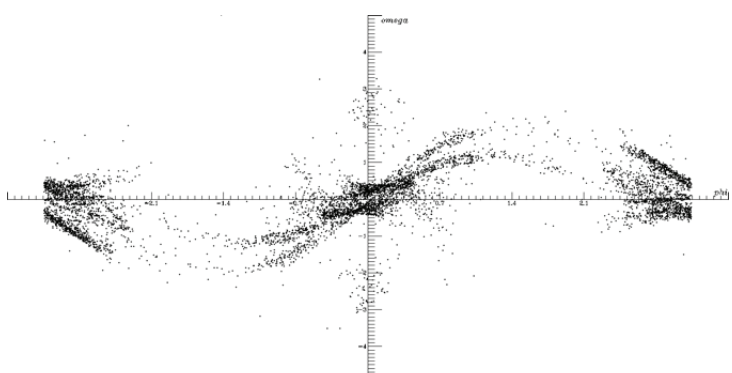
7. ábra. a rángatott rugósinga fáklyadiagramja a Dynamics Solverben



A fáklya-diagramon a kaotikus rendszer valamely változójának időbeli változását ábrázoljuk, több, egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételből indítva. Futtassuk *rangatott_rugosinga_faklyadiagram.ds* probléma-fájlt, amely a fentebb megadott paraméterértékek mellet mutatja a *v(t)* sebességfüggvényt 5 különböző, nagyon közeli φ_0 kezdeti kitérésszög érték mellett (a rendszer többi változójának kezdeti értéke minden indításnál azonos). A kapott képernyőképet a *7. ábrán* szemlélhetjük, jól látható, hogy a sebesség időbeli változását megadó görbék egy ideig együtt futnak, majd teljesen szétválnak, azaz egy karakterisztikus időtartam után a nagyon kicsiny kezdőértékbeli eltérések tökéletesen eltérő viselkedéshez vezetnek.

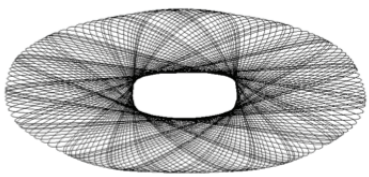
A permanens káosz attraktorának megjelenítése gerjesztett rendszerek esetén a *T* gerjesztési periodusidőnként mintavételezett stroboszkopikus leképezéssel történik. A fenti alapbeállítások melletti kaotikus attraktort a *rangatott_rugosinga_stroboszkop.ds* probléma-fájl futtatásával kapott *8. ábrán* szemlélhetjük.

8. ábra. a kaotikus attraktor stroboszkopikus képe a szög-szögsebesség fázissíkban



A paraméterértékeket megváltoztatva, például {$C = 0{,}01$; $K = 12$; $G = 0{,}6$ és $R = 2$} esetén igen érdekes *kváziperiodikus mozgás* jön létre (a bal alsó sarokban látható a t időváltozó, hagyjuk kb. 2000 időlépésig futni, és használjuk futás közben néha a képernyőtörlő gombot) (*9.a ábra*).

9.a ábra

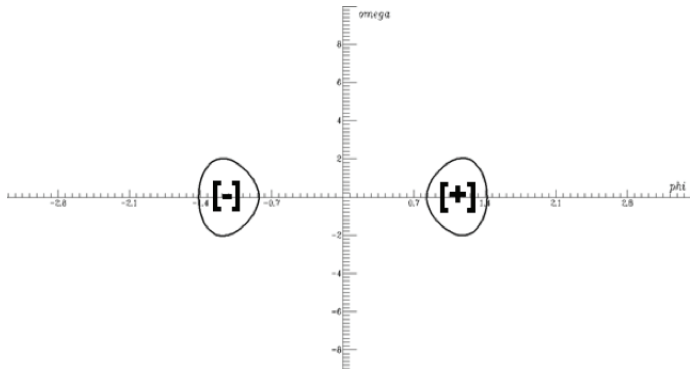


9.b ábra

A rendszerben megjelenő igazán újszerű és izgalmas viselkedés az ún. *tranziens káosz,* amelynél a mozgás trajektóriája csak véges ideig marad egy kaotikus attraktor közelében, de kellően hosszú idő után valamilyen reguláris mozgásba jut el. Futtassuk újra a programot, ezúttal a {$C = 0{,}002$; $K = 15$; $G = 0{,}8$ és $R = 2$} paraméterértékekkel (hagyjuk kb. 10000 időlépésig futni, és használjuk futás közben néha a képernyőtörlő gombot). Azt tapasztaljuk, hogy hosszú idő után a kezdeti kaotikus mozgás egy (furcsa, ellipszisjellegű görbén körbefutó) periodikus mozgásba érkezik (*9.b ábra*).

Tranziens káosz esetén jellemző, hogy az átmeneti kaotikus mozgás után több stabil reguláris mozgás (attraktor) is megjelenhet attól függően, hogy milyen kezdeti feltételből indítottuk a rendszert. Szisztematikusan különböző kezdeti feltételekből indítva a rendszert feltérképezhetjük az egyes attraktorok vonzási tartományainak térképét. Tekintsük példaként a {$C = 0{,}15$; $K = 18$; $G = 0{,}8$ és $R = 2$} paraméterértékekkel adott rendszert, amely esetben tranziens káoszt tapasztalunk két lehetséges periodikus attraktorral (a két attraktor szög-szögsebesség fázissíkbeli képe a *10. ábrán* látható), jelölje őket [-], illetve [+].

10. ábra. A két reguláris attraktor képe a szög-szögsebesség fázissíkban



A *11. ábrán* készítettük el a két reguláris attraktor vonzási tartomány térképét a szög – megnyúlás (φ - l) fázissíkon ($v_0 = 0$ és $w_0 = 0$). A fázissíkon egy (φ_0 ; l_0) pontot aszerint színeztünk, hogy annak a pontnak megfelelő kezdőfeltételből indítva a rendszert melyik reguláris attraktorba jutott a rendszer kellően hosszú idő után: fehérre, ha a [-] attraktorba és feketére, ha a [+] attraktorba.

Az ***a.*** *ábrán* a $\varphi_0 \in [-1,5;+1,5] \otimes l_0 \in [-0,6;+0,9]$ tartomány vonzási térképe látható, a ***b.*** *ábrán* az előbbi ábra egy (kis négyzettel jelölt)

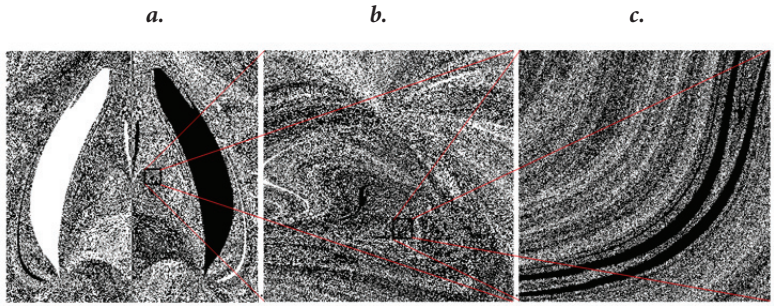
$$\varphi_0 \in [-+0,15;+0,35] \otimes l_0 \in [+0,1;+0,2]$$ tartományát nagyítottuk ki,

majd hasonlóképpen a ***c.*** *ábrán* a ***b.*** *ábra* (kis négyzettel jelölt)

$$\varphi_0 \in [-+0,25;+0,27] \otimes l_0 \in [+0,125;+0,135]$$ tartományát nagyítottuk ki.

Nagyon szépen szemlélhető a vonzási tartományok határainak fraktáljellege.

11. ábra. a két reguláris attraktor szög – megnyúlás fázissíkbeli vonzási tartomány térképe



Összefoglalás

A kiindulási pontként szereplő fizikafeladat arra a tanulságra hívja fel a figyelmet, hogy a fizika oktatásában a kivételt tanítjuk, amikor a reguláris viselkedéseket tárgyaljuk, hiszen általánosságban a rendszerek messze-messze túlnyomó többségében az irreguláris, kaotikus mozgás létezése a természetes. A rugósingán, valamint annak kiterjesztett modelljeként kapott rángatott rugósingán a káoszelmélet számos lényegi sajátossága tanulmányozható a nagyon produktív eszközként használható Dynamics Solver program segítségével.

Függelék

F.1. A rugósinga mozgásegyenletei

A dinamika variációs elvekből származtatható Lagrange-formalizmus szerint tetszőleges rendszerre felírható a kinetikus és potenciális energia különbségeként definiált ún. Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = K - V \,,$$

amellyel a rendszer időfejlődését megadó Euler–Lagrange-mozgásegyenletek (disszipatív effektusok és kényszerek nélküli esetben):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_i} = 0 \,,$$

ahol Φ_i a rendszer általános koordinátáit (jelen esetben az l és φ változókat) jelöli.

Az *1. ábrán* látható rugósinga esetén:

$$K=\frac{1}{2}m\left[\dot{l}^2+\left(L+l\right)^2\dot{\varphi}^2\right] \text{ és } V=-mg\left(L+l\right)\cos\varphi+\frac{1}{2}Dl^2\,,$$

tehát a Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left[\dot{l}^2+\left(L+l\right)^2\dot{\varphi}^2\right]+mg\left(L+l\right)\cos\varphi-\frac{1}{2}Dl^2\,,$$

és a deriválások elvégzésével az Euler-Lagrange mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{l} &= m\left(L+l\right)\dot{\varphi}^2+mg\cos\varphi-Dl \\ m\left(L+l\right)\ddot{\varphi} &= -2m\dot{l}\dot{\varphi}-mg\sin\varphi \end{aligned}\,.$$

A dimenziótlan ($l\to l\cdot L$ és $t\to t\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$) változókkal a mozgásegyenletek:

$$\ddot{l}=\left(l+1\right)\dot{\varphi}^2-l+A\cdot\cos\varphi,$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{-2\dot{l}\dot{\varphi}-A\cdot\sin\varphi}{l+1}\,,$$

ahol $A=\frac{g\cdot m}{L\cdot D}=\frac{g}{\omega_0^2 L}$ dimenziótlan paraméter (az eredeti *L, m, D* és *g* paraméterekből!).

A $\dot{l}=v$ és $\dot{\varphi}=\omega$ (sebességjellegű) változók bevezetésével a standard elsőrendű mozgásegyenlet-rendszer:

$$\begin{cases} \dot{l}=v \\ \dot{v}=\left(l+1\right)\omega^2-l+A\cdot\cos\varphi \\ \dot{\varphi}=\omega \\ \dot{\omega}=\dfrac{-2v\omega-A\cdot\sin\varphi}{l+1} \end{cases},$$

A dimenziótlan teljes (mozgási + helyzeti) energia (amire a Poincaré-térkép kezdőfeltételeinél szükségünk lesz) pedig:

$$E=\frac{1}{2}\left(v^2+\left(l+1\right)^2\omega^2\right)+\left\{\frac{1}{2}l^2-A\cdot\left(l+1\right)\cdot\cos\varphi\right\}\,.$$

F.2. A rángatott rugósinga mozgásegyenletei

Egészítsük ki a modellünket két fontos hatás figyelembevételével. A rugósinga felfüggesztési pontját rángassuk periodikusan, jelen tárgyalásunkban függőleges mozgatással („jojó"), tehát az $O\left(x_F; y_F\right)$ felfüggesztési pontra:

$$x_F = 0 \text{ és } y_F = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad .$$

Másrészt feltételezzük, hogy a mozgó testre egy sebességgel arányos viszkózus súrlódási erő hat, amelyet az ún. Rayleigh-féle disszipációs függvénnyel adunk meg:

$$F_R = \frac{c}{2}\left|\vec{v}\right|^2 \cdot$$

Ekkor az Euler-Langrange mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{g}{\Phi}_i} = \frac{\partial F_R}{\partial \overset{g}{\Phi}_i}$$

A szükséges deriválások elvégzésével, az $\dot{l} = v$ és $\dot{\varphi} = \omega$ (sebességjellegű) változók, valamint a $\Theta = \frac{2\pi}{T} t$ gerjesztési fázis változó bevezetésével, majd a dimenziótlan $l \to l \cdot L$ hosszváltozó és $t \to t \cdot T$ időváltozó helyettesítésével (itt nem részletezett, némileg hosszadalmas munkával) a kapott standard (elsőrendű) alakú (dimenziótlan) mozgásegyenlet-rendszer:

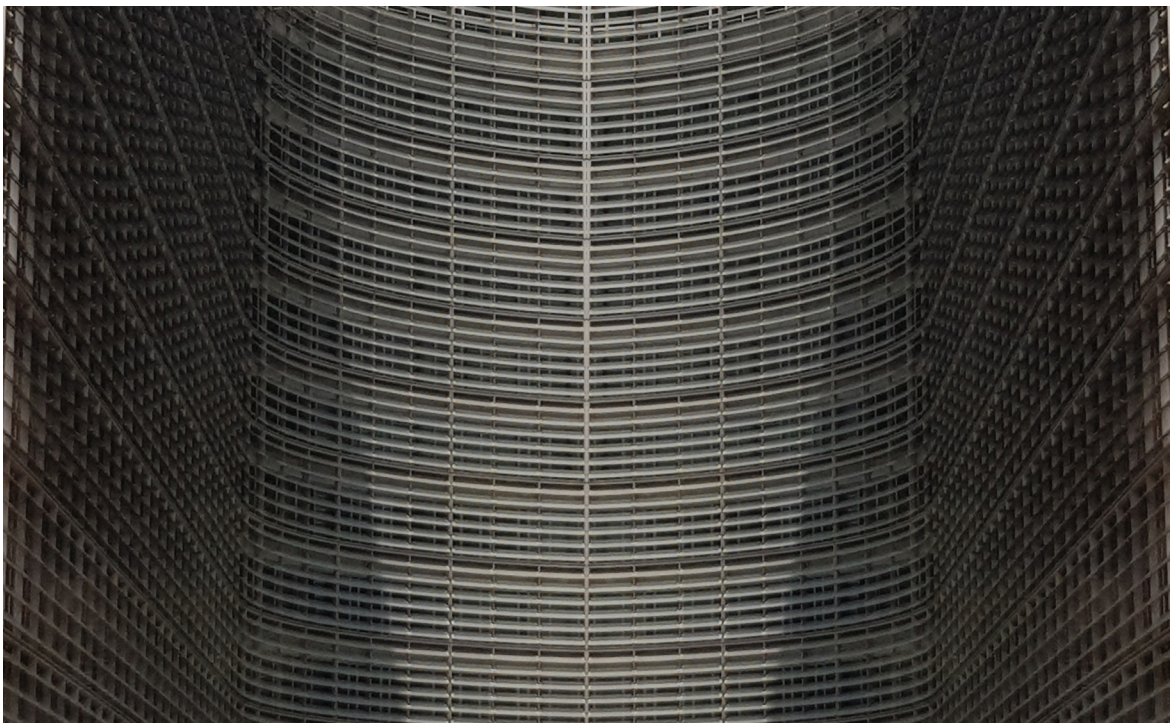
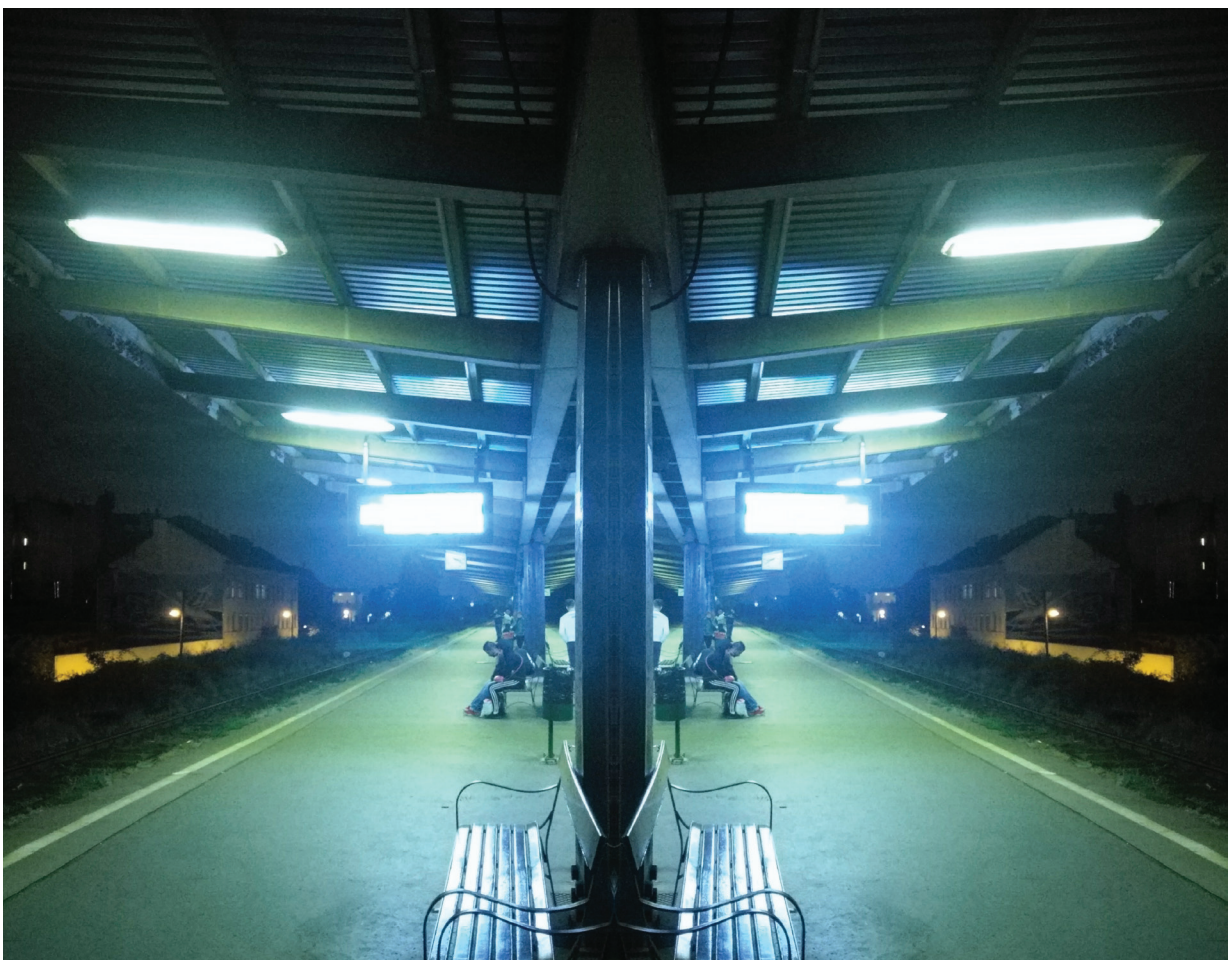
$$\begin{cases} \dot{l} = v \\ \dot{v} = -2\pi R \cdot \cos\Theta \cdot \cos\varphi + \left(l+1\right)\cdot\omega^2 + G \cdot \left(\cos\varphi - 1\right) - K \cdot l - C \cdot v - C \cdot R \cdot \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = -G \cdot \frac{\sin\varphi}{l+1} + 2\pi R \frac{\cos\Theta \cdot \sin\varphi}{l+1} - \frac{2v\omega}{l+1} - C \cdot \omega + C \cdot R \frac{\sin\Theta \cdot \sin\varphi}{l+1} \\ \dot{\Theta} = 2\pi \end{cases}$$

ahol $G = \frac{gT^2}{L};\ C = \frac{cT}{m};\ K = \frac{DT^2}{m};\ R = 2\pi\frac{A}{L}$ dimenziótlan paraméterek.

Köszönetnyilvánítás
A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.
Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen" pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

Galéria

Duma Bálint



ΑΡΥΩΟΥΡΑ